Universidad del Norte

División de Ciencias Básicas
Departamento de Matemáticas

Sistemas de Douglis-Nirenberg de Operadores Pseudodiferenciales

Rogelio Grau Acuña

Trabajo presentado como requisito parcial para optar al título de Magíster en Matemáticas

Directores: Dr. rer. nat. Bienvenido Barraza Martínez
Dr. rer. nat. Jairo Hernández Monzón

Barranquilla, diciembre de 2011

Agradecimientos

Ante todo quiero darle las gracias a Dios por darme sabiduría para alcanzar este nuevo logro en mi vida profesional. A mi amigo Darwin Villar por esa gran amistad y el incondicional apoyo en la redacción de este trabajo. A mi amigo Rubén por su amistad y apoyo. A mis tutores y amigos Jairo Hernández y Bienvenido Barraza, por sus enseñanzas, atenciones y su dedicación en la realización de este trabajo.

También quiero agradecer a todo el cuerpo de profesores de la maestría por haberme brindado su amistad, y transmitirme los conocimientos necesarios para seguir creciendo en el fascinante mundo de las matemáticas. Al profesor Ricardo Prato por el apoyo que me brindó para la realización de una pasantia académica en la Universidad de Leibniz (Alemania), a través del convenio institucional entre esta Universidad y la Universidad del Norte con apoyo financiero del Servicio de Intercambio Académico Alemán DAAD, de la cual me siento muy agradecido, ya que allí desarrollé la mayor parte de mi trabajo. También quiero agradecerle a la Universidad del Norte, y en especial al Departamento de Matemáticas por haberme permitido ser parte de él.

Finalmente quiero darle mis más sinceros agradecimientos a mi madre y mi familia, en especial a mi esposa Rosa Ortiz y a mis hijas María Carolina y María Camila Grau, por su paciencia, amor y apoyo durante el desarrollo de esta maestría.

Introducción

Muchos problemas de la física y la biología se modelan a través de un sistema de ecuaciones pseudodiferenciales acoplado, en donde algunas de las ecuaciones del sistema pueden ser hiperbólicas y otras parabólicas, pero todo el sistema puede ser un sistema de Douglis-Nirenberg elíptico paramétrico en el sentido considerado en [1].

El presente trabajo tiene como objeto estudiar los símbolos asociados a sistemas Douglis-Nirenberg, su parabólicidad, y sus aplicaciones a las ecuaciones generalizadas de una placa termoelástica.

A continuación presentaremos los resultados de este trabajo y la forma como se encuentran distribuidos los capítulos. En el primer capítulo se inicia con los preliminares matemáticos necesarios para el desarrollo de este trabajo, allí se establecen las definiciones de sistemas Douglis-Nirenberg $\Lambda(\phi)$ elípticos, y $\Lambda(\phi)$ elípticos con menores principales. También se define la clase de símbolos vector valuados $S^{r,\rho}_{1,0}(\mathbb{R}^n, E)$ y el concepto de símbolo parabólico según [4].

En el segundo capítulo se prueba que la ecuación generalizada de una placa termoelástica en $\mathbb{R}^n$, que consiste en el sistema

$$\begin{cases} v_{tt} + Lv - L^{\beta} w = 0 \\ w_t + L^{\alpha} w + L^{\beta} v_t = 0 \end{cases} \qquad \text{(EGPT)}$$

donde $0 \leq \alpha, \beta \leq 1, \quad w, v : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$L := (-\Delta)^{\eta} := \mathcal{F}^{-1} |\xi|^{2\eta} \mathcal{F} \quad \text{con} \quad \eta > 0,$$

y la ecuación homogénea

$$u_t + \tilde{A}(D)u = 0, \text{ donde } \; u := (w, v_t, L^{\frac{1}{2}} v)^T$$

y

$$\tilde{A}(\xi) := \begin{pmatrix} |\xi|^{2\alpha\eta} & |\xi|^{2\beta\eta} & 0 \\ -|\xi|^{2\beta\eta} & 0 & |\xi|^{\eta} \\ 0 & -|\xi|^{\eta} & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{para todo } \xi \in \mathbb{R}^n,$$

son equivalentes. Allí $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}^{-1}$ denotan la transformada de Fourier y su inversa respectivamente. Posteriormente se demuestra que $A(D)$ el operador pseudodiferencial asociado a $A(\xi) = \chi(\xi)\tilde{A}(\xi)$, donde $\chi(\xi)$ es la función del Corolario 1.2.12, es un sistema Douglis-Nirenberg $\Lambda(\phi)$ elíptico bajo la escogencia de órdenes

$$m_1 = 2\eta(\alpha - \beta), \quad m_2 = 0, \quad m_3 = 2\eta\left(\frac{1}{2} + \alpha - 2\beta\right),$$

$$l_1 = 2\beta\eta, \quad l_2 = 2\eta(2\beta - \alpha), \quad l_3 = \eta.$$

$$\text{si } \eta > 0 \text{ y } 0 \le \alpha, \beta \le 1 \text{ con } \alpha \ge \beta \text{ y } 2\beta - \alpha \ge \frac{1}{2}.$$

En el tercer capítulo se demuestra bajo qué condiciones símbolos elípticos de sistemas Douglis-Nirenberg son parabólicos. Concretamente se prueba que:

Si $A(D) := (a_{ij}(D))_{q\times q}$ es un sistema Douglis-Nirenberg $\Lambda(\phi)$-elíptico, con $0 < \phi \le \frac{\pi}{2}$, $l_1 = \ldots = l_q$ y $m_1 = \ldots = m_q$, entonces

$$\begin{aligned} A : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}^q) \\ \xi \quad &\mapsto \quad A(\xi) := (a_{ij}(\xi))_{q\times q} \end{aligned}$$

es parabólico en $S^{r_1;\rho}_{1,0}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{C}^q))$, donde ρ es un número natural arbitrario. Luego se prueba que sin la hipótesis de que

$$l_1 = \cdots = l_q \text{ y } m_1 = \cdots = m_q,$$

el resultado anterior no es válido en general. Finalmente se demuestra que el símbolo asociado a las ecuaciones generalizadas de una placa termoelástica es un sistema Douglis-Nirenberg $\Lambda(\phi)$-elíptico que no es parabólico sobre la región

$$T := \left\{(\beta, \alpha) \in [0,1] \times [0,1] : \ \alpha \ge \beta \ y \ 2\beta - \alpha \ge \frac{1}{2}\right\},$$

excepto cuando $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$.

Los resultados obtenidos en este trabajo son de gran utilidad para el estudio de la existencia y unicidad de soluciones del problema no homogéneo asociado a (EGPT), acorde con la teoría desarrollada en [1] o en [4].

Índice general

Capítulo 1

Preliminares matemáticos

1.1. Espacios de símbolos

En este trabajo se usarán las siguientes notaciones :

$$\mathbb{N} \text{ denotará el conjunto de los números naturales}$$

$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$$\mathbb{R} \text{ denotará el conjunto de los números reales}$$

$$\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} | \; x > 0\},$$

$$\mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{0\},$$

$$\mathbb{C} \text{ denotará el conjunto de los números complejos,}$$

$$\mathbb{R}^n \text{ denotará el espacio euclidiano n dimensional,}$$

$$|x| := (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2}} \text{ la norma euclidiana en } \mathbb{R}^n,$$

$$\langle x \rangle := (1 + |x|^2)^{\frac{1}{2}},$$

E, E_i denotarán espacios de Banach y 0_E el cero del espacio E,
$C^k(\Omega)$ con $k \in \mathbb{N}_0$ y $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, denotará el espacio de todas las funciones

$$f : \Omega \to \mathbb{C}$$

con derivadas continuas en Ω hasta el orden k.

$C^\infty(\Omega)$ denotará el espacio de las funciones infinitamente diferenciables sobre Ω.

1.1.1 Definición. (Multiíndice) Un multiíndice en $\mathbb{R}^n$ es una n-tupla $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ de enteros no negativos α_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. El orden del multiíndice α es el número

$$|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n.$$

Dado dos multiíndices α y β, se definen:

$$\alpha + \beta := (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n),$$

$$\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha_i \leq \beta_i \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\alpha! := \alpha_1! \alpha_2! \ldots \alpha_n!$$

Si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ es un multiíndice, se define el monomio x^α como :

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

Un polinomio de grado k en $\mathbb{R}^n$ es una función de la forma :

$$p(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha x^\alpha, \quad x \in \mathbb{R}^n, \text{ con coeficientes } c_\alpha \in \mathbb{C}.$$

Para dos multiíndices $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ se define :

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!} \quad \text{si } \beta \leq \alpha,$$

$$\binom{\alpha}{\beta} = 0 \quad \text{en otro caso.}$$

Para $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ con $|\alpha| \leq k$ y $f \in C^k(\Omega)$, con Ω un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ abierto, se define:

$$\partial^\alpha f = \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n} f, \quad \text{donde } \partial_i^{\alpha_i} = \frac{\partial^{\alpha_i}}{\partial x_i^{\alpha_i}}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Para $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ se define el operador diferencial :

$$D^\alpha := (-i)^{|\alpha|} \partial^\alpha.$$

1.1.2 Definición. (Espacio de las aplicaciones lineales continuas) Sean E_1 y E_2 espacios de Banach con normas $|| \cdot ||_{E_1}$ y $|| \cdot ||_{E_2}$ respectivamente. Con $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ denotaremos el espacio de las aplicaciones lineales continuas con dominio E_1 e imágenes en E_2 , y $\mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E, E)$. $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ está dotado de la norma operador :

$$||T||_{\mathcal{L}(E_1, E_2)} = \sup\{||T(x)||_{E_2} \ : \ x \in E_1 \ y \ ||x||_{E_1} = 1\}.$$

1.1.3 Definición. (Espacio de las funciones rapidamente decreciente) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es el conjunto de todas las funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ tales que

$$f \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \text{ y } \forall\alpha \in \mathbb{N}_0^n \text{ y } \forall k \in \mathbb{N}_0,$$

se tiene que

$$\sup_{\mathbb{R}^n} \langle x\rangle^k |\partial^\alpha f(x)| < \infty.$$

En $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se introduce la familia de seminormas

$$\{|\cdot|_k : \ k \in \mathbb{N}_0\},$$

donde

$$|f|_k := \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ |\alpha|\le k}} \langle x\rangle^k |\partial^\alpha f(x)|.$$

Esta sucesión de seminormas inducen una métrica invariante bajo traslaciones en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ definida por :

$$d(f,g) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|f-g|_k}{1+|f-g|_k} \quad f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

$(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \{|\cdot|_k : \ k \in \mathbb{N}_0\})$ es un espacio topológico de Fréchet, es decir el espacio métrico $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), d)$ es completo véase [6].

1.1.4 Definición. (Espacio de las distribuciones temperadas) El dual topológico de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es denominado el espacio de las distribuciones temperadas y se denota por $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Esto es,

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) := \{u : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C} \mid u \text{ es lineal y continua}\}.$$

1.1.5 Definición. (El espacio $L^p(\mathbb{R}^n)$) Para $1 \le p < \infty$ se define el espacio $L^p(\mathbb{R}^n)$ como el conjunto de todas las funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ tales que f es medible y

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx < \infty.$$

Este espacio es de Banach con la norma

$$||f||_{L^p(\mathbb{R}^n)} := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

1.1.6 Definición. (Transformada de Fourier) Para $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ se define la transformada de Fourier de f como la función dada por :

$$\hat{f}(\xi) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\; dx, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

donde $x \cdot \xi$ es el producto interno usual de dos vectores en $\mathbb{R}^n$.

1.1.7 Definición. (El espacio de símbolos $S^{\mu}_{\delta}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$)
Para $\mu \in \mathbb{R}$ y $0 \leq \delta < 1$, definimos el **espacio de símbolos** $S^{\mu}_{\delta}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ como el conjunto de todas las funciones

$$a : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$$

tales que $a \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ y $||a||^{\mu}_{\delta,k} < \infty$, para todo $k \in \mathbb{N}$, donde

$$||a||^{\mu}_{\delta,k} := \sup_{\substack{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n_0 \\ x,\xi\in\mathbb{R}^n; |\alpha|+|\beta|\leq k}} |D^{\alpha}_{\xi} D^{\beta}_{x} a(x,\xi)| \langle\xi\rangle^{-\mu+|\alpha|-\delta|\beta|}.$$

1.1.8 Observaciones.

1. La definición anterior es equivalente a decir que $S^{\mu}_{\delta}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, es el conjunto de todas las funciones

   $$a : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$$

   tales que $a \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ y para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n_0$ existe $C_{\alpha,\beta} > 0$, con
   $$|D^{\alpha}_{\xi} D^{\beta}_{x} a(x,\xi)| < C_{\alpha,\beta} \langle\xi\rangle^{\mu-|\alpha|+\delta|\beta|}, \quad \forall x, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

2. El sistema de seminormas $||a||^{\mu}_{\delta,k}$, $k \in \mathbb{N}_0$ define un espacio topológico de Fréchet en

   $$S^{\mu}_{\delta}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n).$$

3. En ocasiones se escribirá $S^{\mu}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ en vez de $S^{\mu}_{0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.

4. Si μ y w son números reales tales que $\mu \leq w$, entonces

   $$S^{\mu}_{\delta}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \subset S^{w}_{\delta}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n).$$

1.1.9 Ejemplo. Sea $m \in \mathbb{N}_0$ y $a_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ y supongamos que las derivadas de a_α son acotadas en $\mathbb{R}^n$. Si

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{C} \\ (x,\xi) &\mapsto p(x,\xi) := \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\xi^\alpha, \end{aligned}$$

entonces $p \in S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.

En efecto nótese inicialmente que $p \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Ahora sean $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ arbitrarios, pero fijos. Entonces si $|\alpha| > m$ se tiene que $D_\xi^\alpha D_x^\beta p(x,\xi) = 0$, por lo tanto supongamos que $|\alpha| \leq m$; en cuyo caso tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} |D_\xi^\alpha D_x^\beta p(x,\xi)| &= \left| \sum_{|\phi|\leq m} D_x^\beta a_\phi(x) D_\xi^\alpha \xi^\phi \right| \\ &\leq \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ |\phi|\leq m}} |D_x^\beta a_\phi(x)| \sum_{|\phi|\leq m} |D_\xi^\alpha \xi^\phi| \\ &= \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ |\phi|\leq m}} |D_x^\beta a_\phi(x)| \sum_{\substack{|\phi|\leq m \\ \alpha\leq\phi}} \alpha! \binom{\phi}{\alpha} |\xi^{\phi-\alpha}| \\ &\leq \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ |\phi|\leq m}} |D_x^\beta a_\phi(x)| \sum_{\substack{|\phi|\leq m \\ \alpha\leq\phi}} \alpha! \binom{\phi}{\alpha} |\xi|^{|\phi|-|\alpha|} \\ &\leq \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ |\phi|\leq m}} |D_x^\beta a_\phi(x)| \sum_{\substack{|\phi|\leq m \\ \alpha\leq\phi}} \alpha! \binom{\phi}{\alpha} \langle\xi\rangle^{|\phi|-|\alpha|} \\ &\leq \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ |\phi|\leq m}} |D_x^\beta a_\phi(x)| \max_{\substack{|\phi|\leq m \\ \alpha\leq\phi}} \left\{ \alpha! \binom{\phi}{\alpha} \right\} \sum_{\substack{|\phi|\leq m \\ \alpha\leq\phi}} \langle\xi\rangle^{|\phi|-|\alpha|} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\ |\phi|\leq m}} |D_x^\beta a_\phi(x)| \max_{\substack{|\phi|\leq m\\ \alpha\leq\phi}} \left\{\alpha! \binom{\phi}{\alpha}\right\} \sum_{\substack{|\phi|\leq m\\ \alpha\leq\phi}} \langle\xi\rangle^{m-|\alpha|}\\
&= \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\ |\phi|\leq m}} |D_x^\beta a_\phi(x)| \max_{\substack{|\phi|\leq m\\ \alpha\leq\phi}} \left\{\alpha! \binom{\phi}{\alpha}\right\} \sum_{\substack{|\phi|\leq m\\ \alpha\leq\phi}} 1\cdot\langle\xi\rangle^{m-|\alpha|}.
\end{aligned}
$$

Ahora si definimos

$$
C_{\alpha,\beta} := \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\ |\phi|\leq m}} |D_x^\beta a_\phi(x)| \max_{\substack{|\phi|\leq m\\ \alpha\leq\phi}} \left\{\alpha! \binom{\phi}{\alpha}\right\} \sum_{\substack{|\phi|\leq m\\ \alpha\leq\phi}} 1,
$$

se tiene entonces que

$$
|D_\xi^\alpha D_x^\beta p(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{m-|\alpha|}
$$

para todo $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$. Esto es,

$$
|D_\xi^\alpha D_x^\beta p(x,\xi)|\langle\xi\rangle^{-m+|\alpha|} \leq C_{\alpha,\beta} < \infty
$$

para todo $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$. Por lo tanto, para cada $k \in \mathbb{N}_0$ se tiene

$$
\sup_{\substack{x,\xi\in\mathbb{R}^n\\ |\alpha|+|\beta|\leq k}} |D_\xi^\alpha D_x^\beta p(x,\xi)|\langle\xi\rangle^{-m+|\alpha|} < \infty.
$$

Así $p \in S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.

Los espacios de símbolos independientes la variable espacial a considerar en este trabajo son los siguientes.

1.1.10 Definición. (El espacio de símbolos en $S^\mu(\mathbb{R}^n)$) Sea $\mu \in \mathbb{R}$. Definimos el **espacio de símbolos**, $S^\mu(\mathbb{R}^n)$, como el conjunto de funciones

$$
a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}
$$

tales que $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ existe una constante $C_\alpha > 0$ con la propiedad de que

$$
||\partial_\xi^\alpha a(\xi)|| \leq C_\alpha\langle\xi\rangle^{\mu-|\alpha|},
$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$.

1.1.11 Definición. (El espacio de Símbolos $S^{m,\rho}_{1,0}(\mathbb{R}^n, E)$)
Sea E un espacio de Banach, $m \in \mathbb{R}$ y $\rho \in \mathbb{N}_0$. Definimos el **espacio de símbolos** $S^{m,\rho}_{1,0}(\mathbb{R}^n, E)$, como el conjunto de funciones

$$a : \mathbb{R}^n \to E$$

tales que $a \in C^{\rho}(\mathbb{R}^n, E)$ y para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ con $|\alpha| \leq \rho$ existe una constante $C_\alpha > 0$ con la propiedad de que

$$||\partial_\xi^\alpha a(\xi)||_E \leq C_\alpha \langle \xi \rangle^{m-|\alpha|} \quad \text{para todo } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Osea que los símbolos en $S^{m,\rho}_{1,0}(\mathbb{R}^n, E)$ son E vector valuados y con regularidad limitada.

1.1.12 Ejemplo. Consideremos

$$\begin{aligned} a : \mathbb{R} &\to \mathcal{L}(\mathbb{C}) \\ \xi &\mapsto \; a(\xi) := \xi^2 \cdot I_{\mathbb{C}}, \end{aligned}$$

entonces $a \in S^{2,\rho}_{1,0}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{C}))$, donde ρ es cualquier número natural fijo.

Demostración. Nótese inicialmente que $a \in C^{\rho}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{C}))$. Ahora sea $\alpha \in \mathbb{N}_0$. Entonces se tiene que:

$$\frac{d^\alpha a(\xi)}{d\xi^\alpha} = \begin{cases} \xi^2 \cdot I_{\mathbb{C}}, & si \;\; \alpha = 0 \\ 2\xi \cdot I_{\mathbb{C}}, & si \;\; \alpha = 1 \\ 2I_{\mathbb{C}}, & si \;\; \alpha = 2 \\ O_{\mathcal{L}(\mathbb{C})}, & si \;\; \alpha \geq 3 \end{cases}$$

Veamos ahora lo siguiente:

Si $\alpha = 0$, entonces

$$\begin{aligned} \left|\left| \frac{d^\alpha a(\xi)}{d\xi^\alpha} \right|\right|_{\mathcal{L}(\mathbb{C})} &= \left|\left| \frac{d^0 a(\xi)}{d\xi^\alpha} \right|\right|_{\mathcal{L}(\mathbb{C})} \\ &= ||a(\xi)||_{\mathcal{L}(\mathbb{C})} \\ &= ||\xi^2 \cdot I_{\mathbb{C}}||_{\mathcal{L}(\mathbb{C})} \\ &= |\xi^2| \cdot ||I_{\mathbb{C}}||_{\mathcal{L}(\mathbb{C})} \\ &= |\xi|^2 \\ &\leq \langle \xi \rangle^{2-0} \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Si $\alpha = 1$, entonces

$$\begin{aligned}
\left|\left|\frac{d^\alpha a(\xi)}{d\xi^\alpha}\right|\right|_{\mathcal{L}(\mathbb{C})} &= \left|\left|\frac{d^1 a(\xi)}{d\xi^\alpha}\right|\right|_{\mathcal{L}(\mathbb{C})} \\
&= ||2\xi \cdot I_{\mathbb{C}}||_{\mathcal{L}(\mathbb{C})} \\
&= 2|\xi| \cdot ||I_{\mathbb{C}}||_{\mathcal{L}(\mathbb{C})} \\
&= 2|\xi| \\
&\leq 2\langle\xi\rangle^{2-1} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Si $\alpha = 2$, entonces

$$\begin{aligned}
\left|\left|\frac{d^\alpha a(\xi)}{d\xi^\alpha}\right|\right|_{\mathcal{L}(\mathbb{C})} &= \left|\left|\frac{d^2 a(\xi)}{d\xi^\alpha}\right|\right|_{\mathcal{L}(\mathbb{C})} \\
&= ||2 \cdot I_{\mathbb{C}}||_{\mathcal{L}(\mathbb{C})} \\
&= 2||I_{\mathbb{C}}||_{\mathcal{L}(\mathbb{C})} \\
&= 2 \\
&= 2\langle\xi\rangle^{2-2} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Si $3 \leq \alpha$, entonces

$$\begin{aligned}
\left|\left|\frac{d^\alpha a(\xi)}{d\xi^\alpha}\right|\right|_{\mathcal{L}(\mathbb{C})} &= ||0_{\mathcal{L}(\mathbb{C})}||_{\mathcal{L}(\mathbb{C})} \\
&= 0 \\
&\leq \langle\xi\rangle^{2-\alpha} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

En consecuencia , para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0$ existe un $C_\alpha > 0$ tal que

$$\left|\left|\frac{d^\alpha a(\xi)}{d\xi^\alpha}\right|\right|_{\mathcal{L}(\mathbb{C})} \leq C_\alpha \cdot \langle\xi\rangle^{2-\alpha} \quad \text{para todo } \ \xi \in \mathbb{R}.$$

Esto es, $a \in S^{2,\rho}_{1,0}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{C}))$ para cualquier $\rho \in \mathbb{N}_0$. $\square$

1.1.13 Definición. (Símbolos parabólicos en $S^{m,\rho}_{1,0}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_1, E_0))$) Sean E_1 y E_0 espacios de Banach con $E_1 \hookrightarrow E_0$, $m \in \mathbb{R}^+$, $\rho \in \mathbb{N}_0$ y $a \in S^{m,\rho}_{1,0}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_1, E_0))$. Diremos que el símbolo a es parabólico en $S^{m,\rho}_{1,0}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_1, E_0))$ si existen constantes $\omega \geq 0$ y $\kappa > 0$ tales que para todo $\phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ y $\mu \geq 0$ con $|\xi, \mu| \geq \omega$, se verifica que :

$$a(\xi)+\mu^m e^{i\theta}I_{E_1}:E_1\to E_0 \ \text{ es invertible,}$$
$$[a(\xi)+\mu^m e^{i\theta}I_{E_1}]^{-1}\in\mathcal{L}(E_0,E_1)$$

y

$$||[a(\xi)+\mu^m e^{i\theta}I_{E_1}]^{-1}||_{\mathcal{L}(E_0,E_1)}\le\kappa\cdot\langle\xi,\mu\rangle^{-m},$$

$$\text{donde } |\xi,\mu|=\sqrt{|\xi|^2+\mu^2} \quad \text{y} \quad \langle\xi,\mu\rangle=\sqrt{1+|\xi|^2+\mu^2}.$$

1.1.14 Definición. (Operador pseudodiferencial) Sea $a\in S^{\mu}_{\delta}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$. Definimos el **operador pseudo-diferencial** asociado al símbolo a, denotado por $a(x,D)$, como

$$\begin{aligned} a(x,D): \ \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) &\to \ \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\\ u &\mapsto \ a(x,D)u: \ \mathbb{R}^n \to \ \mathbb{C}\\ &\qquad\qquad x\mapsto \ [a(x,D)u](x) \ := \int e^{ix\xi}a(x,\xi)\hat{u}(\xi)\bar{d}\xi, \end{aligned}$$

donde $\bar{d}\xi=(2\pi)^{-n}d\xi$ y $\hat{u}$ es la transformada de Fourier de u. Via dualidad se extiende este operador a

$$a(x,D):\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

En el caso que a sea independiente de x, denotaremos su operador pseudodiferencial asociado simplemente por $a(D)$.

1.1.15 Ejemplo. Para el polinomio

$$p(x,\xi)=\sum_{|\alpha|\le m}a_\alpha(x)\xi^\alpha$$

como en el Ejemplo **1.1.9** se cumple que

$$p(x,D)=\sum_{|\alpha|\le m}a_\alpha(x)D_x^\alpha.$$

En particular, si $a(\xi)=\xi^2,\ \xi\in\mathbb{R}^n$, entonces $a(D)=-\Delta=-\left(\sum_{i=1}^n\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)$.

1.2. Sistemas Douglis-Nirenberg

1.2.1 Definición. (Sistema Douglis-Nirenberg–SD-N)
Sean $q \in \mathbb{N}$ y A una matriz de tamaño $q \times q$ de operadores pseudo-diferenciales. Decimos que A es un **sistema Douglis-Nirenberg,** si

$$A(x, D) = (a_{i,j}(x, D))_{q\times q}$$

es tal que existen números reales $m_1, \ldots, m_q$ y $l_1, \ldots, l_q$ con la propiedad de que

$$a_{i,j}(x, \xi) \in S_\delta^{l_i+m_j}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n),$$

para todo $i, j = 1 \ldots q$, y los números $r_i = l_i + m_i$ satisfacen $r_1 \geq r_2 \geq \ldots \geq r_q \geq 0$.

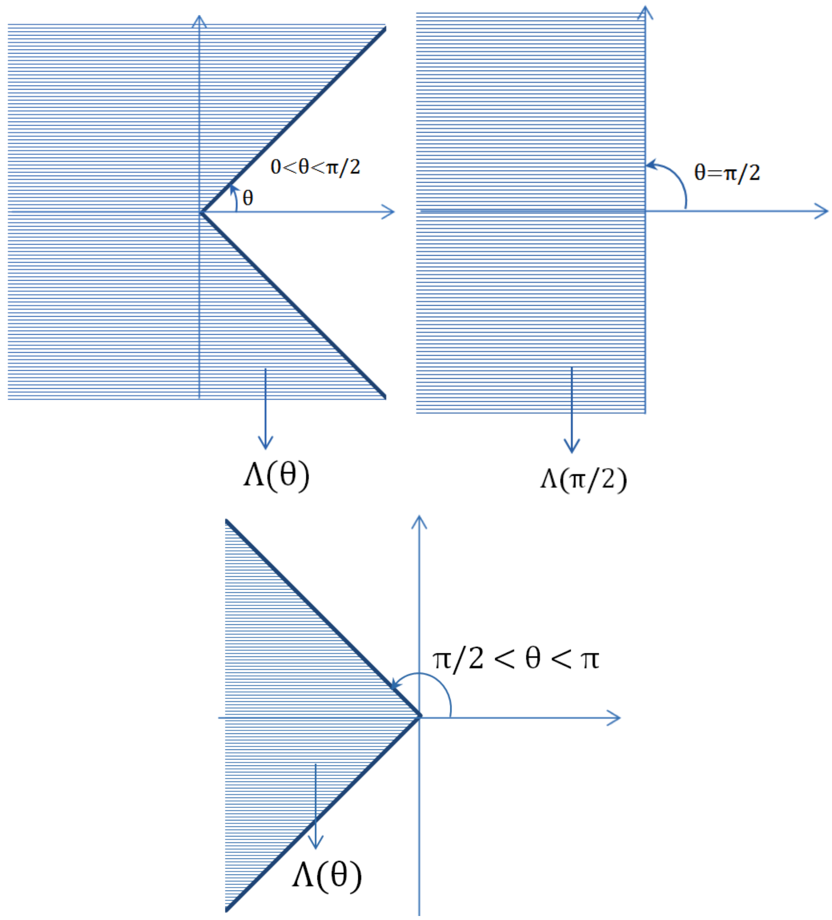
1.2.2 Ejemplo. Para cada $i, j \in \{1, 2\}$ definimos

$$\begin{aligned} a_{i,j} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \quad & \mathbb{C} \\ (x, \xi) \quad \mapsto \quad & a_{i,j}(x, \xi) := \sum_{|\alpha|\leq i+j} b_\alpha^{i,j}(x)\xi^\alpha, \end{aligned}$$

donde $b_\alpha^{i,j}$ son funciones de clase $C^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ y sus derivadas son acotadas en $\mathbb{R}^n$, entonces $A(x, D) = (a_{i,j}(x, D))_{2\times2}$ es un sistema Douglis-Nirenberg bajo la escogencia de órdenes $m_1 = l_1 = 3$ y $m_2 = l_2 = 2$.

1.2.3 Definición. Para $\phi \in]0, \pi[$ definimos el subsector cerrado del plano complejo denotado por $\Lambda := \Lambda(\phi)$ como:

$$\Lambda = \Lambda(\phi) = \{re^{i\varphi} |\ r \geq 0\ y\ \phi \leq \varphi \leq 2\pi - \phi\}.$$



1.2.4 Definición. (Sistemas Douglis-Nirenberg Λ-elípticos) Sea $A(x, D)$ un sistema Douglis-Nirenberg. Diremos que $A(x, D)$ es Λ -elíptico si existen constantes $C > 0$ y $R \geq 0$ tales que

$$|P(x, \xi, \lambda)| \geq C(\langle\xi\rangle^{r_1} + |\lambda|) \dots (\langle\xi\rangle^{r_q} + |\lambda|)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $|\xi| \geq R$, $\lambda \in \Lambda$, donde

$$P(x, \xi, \lambda) = \det(A(x, \xi) - \lambda I_q).$$

Aquí I_q es la matriz identidad de orden $q \times q$ con entradas en $\mathbb{C}$.

1.2.5 Definición. (SD-N Λ-elípticos con menores principales) Sea $A(x, D)$ un sistema Douglis-Nirenberg. Diremos que $A(x, D)$ es $\Lambda-$elíptico con menores principales si existen constantes $C > 0$ y $R \geq 0$ tales que:

$$|\det(A_{[k]}(x,\xi)-\lambda E_k)| \geq C\langle\xi\rangle^{r_1+\ldots+r_{k-1}}(\langle\xi\rangle^{r_k}+|\lambda|),$$

para todo $x\in\mathbb{R}^n,\ |\xi|\geq R,\ \lambda\in\Lambda,\ 1\leq k\leq q$, donde

$$A_{[k]}(x,\xi)=(a_{i,j}(x,\xi))_{1\leq i,j\leq k} \ \ y \ \ E_k=\mathrm{diag}(0,0,\ldots,1)\in\mathbb{C}^{k\times k}.$$

1.2.6 Teorema. Las dos nociones de $\Lambda(\phi)$-elíptico y $\Lambda(\phi)$-elíptico con menores principales son equivalentes.

Demostración. Para la prueba ver [1]. □

1.2.7 Lema. Si $a\in\mathbb{R}_0^+$ y $\lambda\in\Lambda(\phi)$ con $0<\phi<\pi$, entonces

$$|a-\lambda|^2\geq \min\{1,1-\cos\theta\}(a^2+|\lambda|^2).$$

Demostración. Sean $a\in\mathbb{R}_0^+$ y $\lambda\in\Lambda(\phi)$ con $0<\phi<\pi$, entonces

$$\lambda=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

para algún $r>0$ y $\phi\leq\varphi\leq 2\pi-\phi$.
Ahora diferenciemos dos casos respecto a ϕ :

(I) Supongamos que $\phi\in[\frac{\pi}{2},\pi[$, entonces $-\cos\phi\geq 0$ y por lo tanto

$$\min\{1,1-\cos\theta\}=1.$$

Ahora dado que

$$\phi\leq\varphi\leq 2\pi-\phi \text{ y } \phi\in[\frac{\pi}{2},\pi[,$$

se sigue que

$$\frac{\pi}{2}\leq\varphi\leq\frac{3\pi}{2},$$

y por lo tanto $\cos\varphi\leq 0$, luego $\mathrm{Re}(\lambda)\leq 0$ y así $-2a\mathrm{Re}(\lambda)\geq 0$ en consecuencia

$$\begin{aligned}\min\{1,1-\cos\theta\}(a^2+|\lambda|^2) &= (a^2+|\lambda|^2)\\ &\leq a^2+|\lambda|^2-2a\mathrm{Re}(\lambda)\\ &= |a-\lambda|^2,\end{aligned}$$

esto es

$$|a-\lambda|^2\geq\min\{1,1-\cos\theta\}(a^2+|\lambda|^2).$$

(II) Supongamos que $\phi \in]0, \frac{\pi}{2}[$, entonces $\cos\phi > 0$ y por lo tanto

$$\text{mín}\{1, 1-\cos\theta\} = 1 - \cos\theta.$$

Ahora como $\varphi \in [\phi, 2\pi - \phi]$, $\phi \in]0, \frac{\pi}{2}[$ y

$$[\phi, 2\pi - \phi] = \left[\phi, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \cup \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi - \phi\right],$$

consideremos a continuación tres casos con respecto a φ.

Caso 1. Tomemos $\phi \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$. Nótese que $0 < \phi \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$. Ahora dado que la función coseno es una función decreciente $]0, \frac{\pi}{2}[$ se sigue que

$$0 \leq \cos\varphi \leq \cos\theta, \tag{1}$$

por otro lado tenemos también que

$$0 \leq 2a|\lambda| \leq a^2 + |\lambda|^2. \tag{2}$$

Entonces de (1) y (2) se sigue que

$$2a|\lambda|\cos\varphi \leq \left(a^2 + |\lambda|^2\right)\cos\theta,$$

equivalentemente

$$2a\text{Re}(\lambda) \leq \left(a^2 + |\lambda|^2\right)\cos\theta,$$

multiplicando en ambos miembros de la desigualdad por -1 se tiene que

$$-\left(a^2 + |\lambda|^2\right)\cos\theta \leq -2a\text{Re}(\lambda),$$

ahora sumando en ambos de la desigualdad $\left(a^2 + |\lambda|^2\right)$ obtenemos

$$\left(a^2 + |\lambda|^2\right) - \left(a^2 + |\lambda|^2\right)\cos\theta \leq \left(a^2 + |\lambda|^2\right) - 2a\text{Re}(\lambda),$$

esto es

$$\left(a^2 + |\lambda|^2\right)(1 - \cos\theta) \leq |a - \lambda|^2,$$

y así

$$|a - \lambda|^2 \geq \text{mín}\{1, 1-\cos\theta\}(a^2 + |\lambda|^2),$$

ya que

$$\text{mín}\{1, 1-\cos\theta\} = 1 - \cos\theta.$$

Caso 2. Tomemos $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$. Entonces en este caso se prosigue de manera análoga a la demostración en (I).

Caso 3. Tomemos $\frac{3\pi}{2} < \varphi \leq 2\pi - \phi$. Nótese que $\frac{3\pi}{2} < \varphi \leq 2\pi - \phi < 2\pi$. Ahora como la función coseno es creciente en $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ se sigue que

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) < \cos\varphi \leq \cos(2\pi - \phi) = \cos\varphi,$$

es decir

$$0 < \cos\varphi \leq \cos\theta.$$

El resto de la prueba se sigue igual a la del **Caso 1**.

□

1.2.8 Lema. Si $r \geq 0$ y $\xi \in \mathbb{R}^n$ tal que $|\xi| \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$, entonces $2^r|\xi|^r \geq \langle\xi\rangle^r$.

Demostración. Como $|\xi| \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$, entonces $3|\xi|^2 \geq 1$. Equivalentemente

$$4|\xi|^2 \geq 1 + |\xi|^2,$$

por lo tanto

$$2|\xi| \geq \left(1 + |\xi|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

es decir $2|\xi| \geq \langle\xi\rangle$, y como $r \geq 0$, se tiene que $2^r|\xi|^r \geq \langle\xi\rangle^r$. □

1.2.9 Lema. Si $a, b \in \mathbb{R}_0^+$, entonces $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2} \leq \sqrt{a+b}$.

Demostración. Sean $a, b \in \mathbb{R}_0^+$, entonces $a \leq a + b$ y $b \leq a + b$. y dado que la función $\sqrt{.} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ es creciente se sigue que

$$\sqrt{a} \leq \sqrt{a+b} \text{ y } \sqrt{b} \leq \sqrt{a+b},$$

en consecuencia

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq 2\sqrt{a+b},$$

y así

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2} \leq \sqrt{a+b}.$$

□

1.2.10 Lema. Si $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ y $r \in \mathbb{R}^+$, entonces $(a+b)^r \leq 2^r(a^r + b^r)$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ y $r \in \mathbb{R}^+$, entonces

$$\begin{aligned}(a+b)^r &\leq (2\,\text{máx}\{a,b\})^r \\ &= 2^r\,(\text{máx}\{a,b\})^r \\ &\leq 2^r(a^r + b^r).\end{aligned}$$

□

1.2.11 Proposición. Sea $K \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$, K compacto, Ω abierto. Entonces existe $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que:

$$0 \leq \varphi \leq 1,\ \varphi(\xi) = 1 \text{ en } K \text{ y } \varphi(\xi) = 0 \text{ en } \mathbb{R}^n - \Omega.$$

DEMOSTRACIÓN. Para una demostración véase [6]. □

1.2.12 Corolario. Existe una función $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n),\ 0 \leq \chi \leq 1$, con

$$\chi(\xi) := \begin{cases} 0 & , \ |\xi| \leq 1 \\ 1 & , \ |\xi| \geq 2 \end{cases}.$$

DEMOSTRACIÓN. La existencia de la función χ es una consecuencia inmediata de la proposición anterior considerando los conjuntos

$$K := \{\xi \in \mathbb{R}^n : \|\xi\| \leq 1\} \text{ y } \ \Omega := \left\{\xi \in \mathbb{R}^n : \|\xi\| < \frac{3}{2}\right\}.$$

Luego la función deseada es

$$\chi := 1 - \varphi.$$

□

1.2.13 Lema. Sea E un espacio de Banach complejo y $T \in \mathcal{L}(E)$. Si $|\lambda| > \|T\|_{\mathcal{L}(E)}$, entonces

$$\|(\lambda I_E - T)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{1}{|\lambda| - \|T\|_{\mathcal{L}(E)}}.$$

Capítulo 2

Ecuaciones generalizadas de una placa termoelásticas

2.1. Generalidades

Las ecuaciones generalizadas de una placa termoelástica en $\mathbb{R}^n$ consisten en un sistema de la forma

$$(1) \begin{cases} v_{tt} + Lv - L^{\beta} w = 0 \\ w_t + L^{\alpha} w + L^{\beta} v_t = 0, \end{cases}$$

dependiendo de los parametros $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$, junto con las condiciones iniciales

$$v(0, \cdot) = v_0, \quad v_t(0, \cdot) = v_1, \quad w(0, \cdot) = w_0,$$

donde $L := (-\triangle)^{\eta} := \mathcal{F}^{-1}\left(|\xi|^{2\eta}\mathcal{F}\right)$. Aqui $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}^{-1}$ denotan la transformada de Fourier y su transformada inversa, respectivamente. Cuando el valor de los parametros son $\eta = 2$ y $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, se obtienen las ecuaciones clásicas de una placa termoelástica esto es:

$$(2) \begin{cases} v_{tt} + \triangle^2 v + \triangle w = 0 \\ w_t - \triangle w - \triangle v_t = 0, \end{cases}$$

donde v representa la deflexión vertical de la placa y w la diferencia de temperatura con respecto a una referencia. Una derivación de las ecuaciones en (2), fue hecha en [3]. También se tiene que si $\beta = \frac{1}{2}$ y $\eta = 0$ entonces el sistema (1) modela problemas viscoelásticos. El propósito fundamental de este capítulo es demostrar que: Haciendo $u = \left(w, v_t, L^{\frac{1}{2}} v\right)^T$ el sistema (1) es equivalente al problema

$$u_t + \tilde{A}(D)u = 0,$$

donde $\tilde{A}(D)u = \mathcal{F}^{-1}\left(\tilde{A}(\xi)\mathcal{F}u\right)$ es un operador pseudodiferencial con símbolo

$$\tilde{A}(\xi) := \begin{pmatrix} |\xi|^{2\alpha\eta} & |\xi|^{2\beta\eta} & 0 \\ -|\xi|^{2\beta\eta} & 0 & |\xi|^{\eta} \\ 0 & -|\xi|^{\eta} & 0 \end{pmatrix}.$$

Se prueba también que si χ es la función del Corolario 1.2.12, entonces bajo una escogencia adecuada de ordenes el símbolo $A(\xi) = \chi(\xi)\tilde{A}(\xi)$ es un sistema Douglis-Nirenberg $\Lambda(\phi)$-elíptico para cualquier $\phi \in]0, \pi[$, siempre y cuando (β, α) sea un punto interior de la región triángular

$$T := \left\{(\beta, \alpha) \in [0,1] \times [0,1] : \ \alpha \geq \beta \ y \ 2\beta - \alpha \geq \frac{1}{2}\right\}.$$

2.2. Resultados básicos

2.2.1 Teorema. Sean $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$, $w, v : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y $L := (-\Delta)^{\eta} := \mathcal{F}^{-1}|\xi|^{2\eta}\mathcal{F}$ con $\eta > 0$, $L^{\alpha} := (-\triangle)^{\alpha\eta}$ y

$$\begin{cases} v_{tt} + Lv - L^{\beta} w = 0 \\ w_t + L^{\alpha} w + L^{\beta} v_t = 0 \end{cases}$$

Entonces bajo el cambio de variable $u = (w, v_t, L^{\frac{1}{2}} v)^T$ el sistema anterior es equivalente a la ecuación

$$u_t + \tilde{A}(D)u = 0,$$

donde

$$\tilde{A}(\xi) := \begin{pmatrix} |\xi|^{2\alpha\eta} & |\xi|^{2\beta\eta} & 0 \\ -|\xi|^{2\beta\eta} & 0 & |\xi|^{\eta} \\ 0 & -|\xi|^{\eta} & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{para todo } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

DEMOSTRACIÓN. Considerando la ecuación $u_t + \tilde{A}(D)u = 0$, se tiene que:

$$\begin{array}{lll} \tilde{a}_{11}(\xi) = |\xi|^{2\alpha\eta}, & \tilde{a}_{12}(\xi) = |\xi|^{2\beta\eta}, & \tilde{a}_{13}(\xi) = 0, \\ \tilde{a}_{21}(\xi) = -|\xi|^{2\beta\eta}, & \tilde{a}_{22}(\xi) = 0, & \tilde{a}_{23}(\xi) = |\xi|^{\eta}, \\ \tilde{a}_{31}(\xi) = 0, & \tilde{a}_{32}(\xi) = -|\xi|^{\eta}, & \tilde{a}_{33}(\xi) = 0. \end{array}$$

Tomando en cuenta que:

$$L = (-\Delta)^{\eta} = \mathcal{F}^{-1}|\xi|^{2\eta}\mathcal{F},$$

los operadores $\tilde{a}_{ij}(D)$ asociados a cada símbolo $\tilde{a}_{ij}(\xi)$ son:

$\tilde{a}_{11}(D) = \mathcal{F}^{-1}|\xi|^{2\alpha\eta}\mathcal{F} = L^{\alpha}$,
$\tilde{a}_{12}(D) = \mathcal{F}^{-1}|\xi|^{2\beta\eta}\mathcal{F} = L^{\beta}$,
$\tilde{a}_{13}(D) = 0$,
$\tilde{a}_{21}(D) = -\mathcal{F}^{-1}|\xi|^{2\beta\eta}\mathcal{F} = -L^{\beta}$,
$\tilde{a}_{22}(D) = 0$,
$\tilde{a}_{23}(D) = \mathcal{F}^{-1}|\xi|^{\eta}\mathcal{F} = L^{\frac{1}{2}}$,
$\tilde{a}_{31}(D) = 0$,
$\tilde{a}_{32}(D) = -\mathcal{F}^{-1}|\xi|^{\eta}\mathcal{F} = -L^{\frac{1}{2}}$,
$\tilde{a}_{33}(D) = 0$.

De esta manera se tiene que

$$\tilde{A}(D) = \begin{pmatrix} L^{\alpha} & L^{\beta} & 0 \\ -L^{\beta} & 0 & L^{\frac{1}{2}} \\ 0 & -L^{\frac{1}{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora teniendo en cuenta que $u = (w, v_t, L^{\frac{1}{2}}v)^T$, se obtiene que:

$$u_t = (w_t, v_{tt}, L^{\frac{1}{2}}v_t)^T,$$

de donde se sigue que

$$u_t + \tilde{A}(D)u = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} w_t \\ v_{tt} \\ L^{\frac{1}{2}}v_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L^{\alpha} & L^{\beta} & 0 \\ -L^{\beta} & 0 & L^{\frac{1}{2}} \\ 0 & -L^{\frac{1}{2}} & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} w \\ v_t \\ L^{\frac{1}{2}}v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} w_t \\ v_{tt} \\ L^{\frac{1}{2}}v_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L^{\alpha}w + L^{\beta}v_t \\ -L^{\beta}w + Lv \\ -L^{\frac{1}{2}}v_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} w_t + L^\alpha w + L^\beta v_t \\ v_{tt} + Lv - L^\beta w \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_{tt} + Lv - L^\beta w = 0 \\ w_t + L^\alpha w + L^\beta v_t = 0. \end{cases}$$

Como se quería demostrar. □

2.2.2 Teorema. Sean $\eta > 0$ y $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ tal que $\alpha \geq \beta$ y $2\beta - \alpha \geq \frac{1}{2}$, y $\chi(\xi)$ como en el Corolario 1.2.12,

$$A(\xi) := \begin{pmatrix} \chi(\xi)|\xi|^{2\alpha\eta} & \chi(\xi)|\xi|^{2\beta\eta} & 0 \\ -\chi(\xi)|\xi|^{2\beta\eta} & 0 & \chi(\xi)|\xi|^{\eta} \\ 0 & -\chi(\xi)|\xi|^{\eta} & 0 \end{pmatrix}, \ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Entonces para cada $0 < \phi < \pi$, $A(D)$ es un sistema Douglis-Nirenberg $\Lambda(\phi)-$ elíptico bajo la escogencia de órdenes

$$m_1 = 2\eta(\alpha - \beta), \quad m_2 = 0, \quad m_3 = 2\eta\left(\frac{1}{2} + \alpha - 2\beta\right)$$

$$l_1 = 2\beta\eta, \quad l_2 = 2\eta(2\beta - \alpha), \quad l_3 = \eta.$$

Demostración. Teniendo en cuenta la escogencia de órdenes

$$\begin{array}{lll} m_1 = 2\eta(\alpha - \beta) & m_2 = 0 & m_3 = 2\eta(\frac{1}{2} + \alpha - 2\beta) \\ l_1 = 2\beta\eta & l_2 = 2\eta(2\beta - \alpha) & l_3 = \eta \end{array}$$

se verifica que

$$r_1 = 2\eta\alpha, \quad r_2 = 2\eta(2\beta - \alpha) \quad r_3 = 2\eta(1 + \alpha - 2\beta)$$

son números positivos y

$$r_1 > r_2 > r_3 > 0.$$

Además es claro que $a_{i,j}(\xi) \in S^{l_i + m_j}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ para cada $i, j = 1, 2, 3$; esto muestra que $A(D)$ es un sistema Douglis-Nirenberg. Mostremos ahora que $A(D)$ es $\Lambda-$elíptico con menores principales y en consecuencia tendremos que $A(D)$ es $\Lambda-$elíptico según el Teorema 1.2.6.

1. Si $k = 1$, entonces

$$\begin{aligned}\det(A_{[1]}(\xi) - \lambda E_1) &= \det(|\xi|^{2\alpha\eta} - \lambda)\\ &= |\xi|^{2\alpha\eta} - \lambda\\ &= |\xi|^{r_1} - \lambda,\end{aligned}$$

para todo $|\xi| \geq 2 \;\; y \;\; \lambda \in \Lambda(\phi)$

2. Si $k = 2$, entonces

$$\begin{aligned}\det(A_{[2]}(\xi) - \lambda E_2) &= \det\left(\begin{pmatrix} |\xi|^{2\alpha\eta} & |\xi|^{2\beta\eta} \\ -|\xi|^{2\beta\eta} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right)\\ &= \det\begin{pmatrix} |\xi|^{2\alpha\eta} & |\xi|^{2\beta\eta} \\ -|\xi|^{2\beta\eta} & -\lambda \end{pmatrix}\\ &= -\lambda|\xi|^{2\alpha\eta} + |\xi|^{4\beta\eta}\\ &= |\xi|^{2\alpha\eta}(-\lambda + |\xi|^{4\beta\eta - 2\alpha\eta})\\ &= |\xi|^{r_1}(|\xi|^{r_2} - \lambda)\end{aligned}$$

para todo $|\xi| \geq 2 \;\; y \;\; \lambda \in \Lambda(\phi)$.

3. Si $k = 3$,

$$\begin{aligned}\det(A_{[3]}(\xi) - \lambda E_3) &= \det\left(\begin{pmatrix} \chi(\xi)|\xi|^{2\alpha\eta} & \chi(\xi)|\xi|^{2\beta\eta} & 0 \\ -\chi(\xi)|\xi|^{2\beta\eta} & 0 & \chi(\xi)|\xi|^{\eta} \\ 0 & -\chi(\xi)|\xi|^{\eta} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right)\\ &= \det\begin{pmatrix} |\xi|^{2\alpha\eta} & |\xi|^{2\beta\eta} & 0 \\ -|\xi|^{2\beta\eta} & 0 & |\xi|^{\eta} \\ 0 & -|\xi|^{\eta} & -\lambda \end{pmatrix}\\ &= |\xi|^{2\alpha\eta + 2\eta} - \lambda|\xi|^{4\beta\eta}\\ &= |\xi|^{4\beta\eta}(|\xi|^{2\alpha\eta + 2\eta - 4\beta\eta} - \lambda)\\ &= |\xi|^{2\alpha\eta + (4\beta\eta - 2\alpha\eta)}(|\xi|^{2\eta(\alpha + 1 - 2\beta)} - \lambda)\\ &= |\xi|^{r_1 + r_2}(|\xi|^{r_3} - \lambda)\end{aligned}$$

para todo $|\xi| \geq 2 \;\; y \;\; \lambda \in \Lambda(\phi)$.

Por lo tanto, tenemos :

$$\det(A_{[k]}(\xi) - \lambda E_k) = \begin{cases} |\xi|^{r_1} - \lambda, & si \;\; k = 1 \\ |\xi|^{r_1}(|\xi|^{r_2} - \lambda), & si \;\; k = 2 \\ |\xi|^{r_1 + r_2}(|\xi|^{r_3} - \lambda), & si \;\; k = 3 \end{cases}$$

Ahora tomando $M := (\text{mín}\{1, 1 - \cos\theta\})^{\frac{1}{2}}$ y $\xi \in \mathbb{R}^n$ con $|\xi| \geq 2$ se tiene que:

$$
\begin{aligned}
|\det(A_{[1]}(\xi)-\lambda E_1)| &= \Big||\xi|^{r_1}-\lambda\Big| \\
&\geq M(|\xi|^{2r_1}+|\lambda|^2)^{\frac{1}{2}} && \text{Lema 1.2.7} \\
&\geq \frac{M}{2}(|\xi|^{r_1}+|\lambda|) && \text{Lema 1.2.9} \\
&= \frac{M}{2^{1+r_1}}(2^{r_1}|\xi|^{r_1}+2^{r_1}|\lambda|) \\
&\geq \frac{M}{2^{1+r_1}}(\langle\xi\rangle^{r_1}+2^{r_1}|\lambda|) && \text{Lema 1.2.8} \\
&> \frac{M}{2^{1+r_1}}(\langle\xi\rangle^{r_1}+|\lambda|) && \text{pues} \quad (2^{r_1}>1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|\det(A_{[2]}(\xi)-\lambda E_2)| &= \Big||\xi|^{r_1}(|\xi|^{r_2}-\lambda)\Big| \\
&= |\xi|^{r_1}\Big||\xi|^{r_2}-\lambda\Big| \\
&\geq \frac{\langle\xi\rangle^{r_1}}{2^{r_1}}\Big||\xi|^{r_2}-\lambda\Big| && \text{Lema 1.2.8} \\
&\geq \frac{\langle\xi\rangle^{r_1}}{2^{r_1}}\frac{M}{2^{1+r_2}}(\langle\xi\rangle^{r_2}+|\lambda|) && \text{análogo al caso anterior} \\
&= \frac{M}{2^{1+r_1+r_2}}\langle\xi\rangle^{r_1}(\langle\xi\rangle^{r_2}+|\lambda|),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|\det(A_{[3]}(\xi)-\lambda E_3)| &= \Big||\xi|^{r_1+r_2}(|\xi|^{r_3}-\lambda)\Big| \\
&= |\xi|^{r_1+r_2}(|\xi|^{r_3}-\lambda) \\
&= \frac{\langle\xi\rangle^{r_1+r_2}}{2^{r_1+r_2}}(|\xi|^{r_3}-\lambda) && \text{Lema 1.2.8} \\
&= \frac{\langle\xi\rangle^{r_1+r_2}}{2^{r_1+r_2}}\frac{M}{2^{1+r_3}}(\langle\xi\rangle^{r_3}+|\lambda|) \\
&= \frac{M}{2^{1+r_1+r_2+r_3}}\langle\xi\rangle^{r_1+r_2}(\langle\xi\rangle^{r_3}+|\lambda|).
\end{aligned}
$$

En conclusión, tomando $C=\frac{M}{2^{r_1+r_2+r_3+1}}$ y $R=2$ se tiene que :

$$|\det(A_{[k]}(\xi)-\lambda E_k)| \geq C\cdot\langle\xi\rangle^{r_1+\ldots+r_{k-1}}\cdot(\langle\xi\rangle^{r_k}+|\lambda|)$$

para todo $|\xi|\geq 2$ y para todo $\lambda\in\Lambda(\theta)$ y $k=1,2,3$.

Esto muestra que $A(D)$ es un sistema Douglis-Nirenberg $\Lambda-$elíptico con menores principales. Ahora por el Teorema 1.2.6 se sigue que $A(D)$ es $\Lambda-$elíptico.

□

Capítulo 3

Relación entre símbolos parabólicos y símbolos de sistemas Douglis - Nirenberg Λ-elípticos

3.1. Resultados principales del trabajo

A continuación mostraremos que bajo ciertas condiciones un sistema Douglis-Nirenberg $\Lambda-$elíptico es parabólico. En el teorema siguiente la matriz $A(\xi) = (a_{ij}(\xi))_{q\times q} \in \mathbb{C}^{q\times q}$ será entendida como una aplicación en $\mathcal{L}(\mathbb{C}^q)$ teniendo en cuenta que $\mathbb{C}^{q\times q} \cong \mathcal{L}(\mathbb{C}^q)$.

3.1.1 Teorema. Sea $A(D) := (a_{ij}(D))_{q\times q}$ un sistema Douglis-Nirenberg $\Lambda(\phi)$-elíptico con $0 < \phi \leq \frac{\pi}{2}$, $l_1 = \ldots = l_q$ y $m_1 = \ldots = m_q$. Entonces

$$A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}^q)$$

es parabólico en $S^{r_1,\rho}_{1,0}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{C}^q))$, donde ρ es un número natural arbitrario.

Demostración. Supongamos que $A(D) = (a_{ij}(D))_{q\times q}$ un sistema Douglis-Nirenberg $\Lambda(\phi)$-elíptico con

$$0 < \phi \leq \frac{\pi}{2},\ l_1 = \ldots = l_q \text{ y } m_1 = \ldots = m_q.$$

Entonces por definición se tiene que existen constantes $C > 0$ y $R \geq 0$ tales que

$$|\det(A(\xi) - \lambda I_q)| \geq C(\langle\xi\rangle^{r_1} + |\lambda|) \dots (\langle\xi\rangle^{r_q} + |\lambda|) \qquad (1.0)$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ con $|\xi| \geq R$ y $\lambda \in \Lambda(\phi)$.

Ahora dado que

$$l_1 = \dots = l_q \text{ y } m_1 = \dots = m_q,$$

se sigue que la expresión (1.0) se transforma en

$$|\det(A(\xi) - \lambda I_q)| \geq C\,(\langle\xi\rangle^{r_1} + |\lambda|)^q$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ con $|\xi| \geq R$ y $\lambda \in \Lambda(\phi)$.

Ahora sea $\rho \in \mathbb{N}_0$ cualquiera pero fijo y veamos que

$$A \in S_{1,0}^{r_1,\rho}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{C}^q)).$$

Para ello mostremos que $A \in C^\rho(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{C}^q))$ y que para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ tal que $|\alpha| \leq \rho$, se cumple que existe una constante positiva C_α con la propiedad de que

$$\|\partial_\xi^\alpha A(\xi)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^q)} \leq C_\alpha \langle\xi\rangle^{r_1 - |\alpha|} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

En efecto, como cada

$$a_{ij}(\xi) \in S^{l_i + m_j}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}),$$

para todo $i, j = 1, \cdots, q$, entonces por definición se tiene que

$$a_{ij}(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}),$$

para todo $i, j = 1, \cdots, q$. En particular $a_{ij}(\xi) \in C^\rho(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. De aquí se sigue que $A \in C^\rho(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{C}^q))$. Ahora, dado $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ con $|\alpha| \leq \rho$, sabemos que

$$\|\partial_\xi^\alpha A(\xi)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^q)} = \sup_{x \in \mathbb{C}^q, |x|=1} \|\partial_\xi^\alpha A(\xi) x\|_{\mathbb{C}^q}.$$

Sea $x := (x_1, \dots, x_q)^T \in \mathbb{C}^q$ cualquiera con $|x| = 1$. Entonces:

$$\begin{aligned}\|\partial_\xi^\alpha A(\xi)x\|_{\mathbb{C}^q} &= \left\|\left(\sum_{j=1}^q \partial_\xi^\alpha a_{1j}(\xi)\cdot x_j,\cdots,\sum_{j=1}^q \partial_\xi^\alpha a_{qj}(\xi)\cdot x_j\right)^T\right\|_{\mathbb{C}^q}\\ &\leq \sum_{i=1}^q \left|\sum_{j=1}^q \partial_\xi^\alpha a_{ij}(\xi)\cdot x_j\right|\\ &\leq \sum_{i=1}^q\sum_{j=1}^q |\partial_\xi^\alpha a_{ij}(\xi)|\cdot|x_j|\\ &\leq \sum_{i=1}^q\sum_{j=1}^q |\partial_\xi^\alpha a_{ij}(\xi)|.\end{aligned}$$

Pero, como cada $a_{ij}(\xi) \in S^{r_1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$ para todo $i,j = 1,2,\cdots q$, para este $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ existe un $C_{ij}(\alpha)$ positivo tal que

$$\begin{aligned}|\partial_\xi^\alpha a_{ij}(\xi)| &\leq C_{ij}(\alpha)\langle\xi\rangle^{r_1-|\alpha|}\\ &\leq C_\alpha^*\langle\xi\rangle^{r_1-|\alpha|}, \qquad \forall\xi\in\mathbb{R}^n,\end{aligned}$$

donde $C_\alpha^* := \max\limits_{i,j=1,\cdots,q} C_{ij}(\alpha)$. Es decir,

$$|\partial_\xi^\alpha a_{ij}(\xi)| \leq C_\alpha^*\langle\xi\rangle^{r_1-|\alpha|}, \qquad \forall\xi\in\mathbb{R}^n\ ,\ \forall i,j=1,\cdots q.$$

En consecuencia,

$$\|\partial_\xi^\alpha A(\xi)x\|_{\mathbb{C}^q} \leq \sum_{i=1}^q\sum_{j=1}^q C_\alpha^*\langle\xi\rangle^{r_1-|\alpha|}, \quad \forall\xi\in\mathbb{R}^n,$$

y por lo tanto

$$\|\partial_\xi^\alpha A(\xi)x\|_{\mathbb{C}^q} \leq q^2 C_\alpha^*\langle\xi\rangle^{r_1-|\alpha|}, \quad \forall\xi\in\mathbb{R}^n.$$

Ahora, como $x\in\mathbb{C}^q$ con $|x|=1$, es arbitrario, se deduce que

$$\sup_{\substack{x\in\mathbb{C}^q\\|x|=1}} \|\partial_\xi^\alpha A(\xi)x\|_{\mathbb{C}^q} \leq q^2 C_\alpha^*\langle\xi\rangle^{r_1-|\alpha|}, \quad \forall\xi\in\mathbb{R}^n,$$

esto es,

$$\|\partial_\xi^\alpha A(\xi)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^q)} \leq q^2 C_\alpha^*\langle\xi\rangle^{r_1-|\alpha|} \quad \forall\xi\in\mathbb{R}^n.$$

De lo anterior se sigue que $A\in S_{1,0}^{r_1;\rho}(\mathbb{R}^n,\mathcal{L}(\mathbb{C}^q))$.

Mostremos a continuación que A es parabólico en $S_{1,0}^{r_1;\rho}(\mathbb{R}^n,\mathcal{L}(\mathbb{C}^q))$. Para ello demostremos las dos afirmaciones siguientes

(I) Existe un $\kappa_1 > 0$ y $R > 0$ tales que $\forall |\xi| \geq R$, $\mu \geq 0$ y $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ se cumple que

$$A(\xi) + \mu^{r_1} e^{i\theta} I_q : \mathbb{C}^q \to \mathbb{C}^q \text{ es invertible,}$$

$$(A(\xi) + \mu^{r_1} e^{i\theta} I_q)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^q)$$

y

$$\left\| \left(A(\xi) + \mu^{r_1} e^{i\theta} I_q \right)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^q)} \leq \kappa_1 \langle \xi, \mu \rangle^{-r_1}.$$

(II) Existe $\kappa_0 > 0$ y un $\mu_0 > 0$ tal que para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$, con $|\xi| \leq R$, $\mu \geq \mu_0$ y $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ se cumple que

$$A(\xi) + \mu^{r_1} e^{i\theta} I_q : \mathbb{C}^q \to \mathbb{C}^q \text{ es invertible,}$$

$$(A(\xi) + \mu^{r_1} e^{i\theta} I_q)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^q)$$

y

$$\left\| \left(A(\xi) + \mu^{r_1} e^{i\theta} I_q \right)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^q)} \leq \kappa_0 \langle \xi, \mu \rangle^{-r_1}.$$

Veamos la prueba de la afirmación (I)

Sean $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \mu \in \mathbb{R}_0^+$ y definamos $\lambda^* := \mu^{r_1} e^{i\theta}$. Es claro que $-\lambda^* \in \Lambda(\phi)$, entonces por hipótesis, se tiene que

$$|\det(A(\xi) - (-\lambda^*) I_q)| \geq C(\langle \xi \rangle^{r_1} + |\lambda^*|)^q$$

lo cual es válido para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ con $|\xi| \geq R,\ \mu \in \mathbb{R}_0^+,\ \ \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Además, dado que $C > 0$ y $(\langle \xi \rangle^{r_1} + |\lambda^*|)^q > 0$ se deduce que

$$\det(A(\xi) + \lambda^* I_q) \neq 0.$$

En consecuencia, $A(\xi) + \lambda^* I_q$ es invertible. Así $(A(\xi) + \lambda^* I_q)^{-1}$ existe y es lineal, y dado que el dominio de esta aplicación es de dimensión finita se sigue que $(A(\xi) + \lambda^* I_q)^{-1}$ es continua. De esta manera

$$(A(\xi) + \lambda^* I_q)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^q),$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ con $|\xi| \geq R,\ \mu \in \mathbb{R}_0^+,\ \ \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, donde $\lambda^* = \mu^{r_1} e^{i\theta}$.

Ahora como $(A(\xi) + \lambda^* I_q)$ es invertible, se tiene del álgebra lineal que

$$(A(\xi) + \lambda^* I_q)^{-1} = \frac{1}{\det(A(\xi) + \lambda^* I_q)} \cdot \operatorname{Adj}(A(\xi) + \lambda^* I_q).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\|(A(\xi)+\lambda^* I_q)^{-1})\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^q)} &= \frac{1}{|\det(A(\xi)+\lambda^* I_q)|}\cdot \|\mathrm{Adj}(A(\xi)+\lambda^* I_q)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^q)}\\ &\le \frac{1}{C}(\langle\xi\rangle^{r_1}+|\lambda^*|)^{-q}\|\mathrm{Adj}(A(\xi)+\lambda^* I_q)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^q)},\end{aligned}$$

para todo $\xi\in\mathbb{R}^n$ con $|\xi|\ge R,\ \mu\in\mathbb{R}_0^+,\ \ \theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

Esto es

$$\|(A(\xi)+\lambda^* I_q)^{-1})\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^q)} \le \frac{1}{C}(\langle\xi\rangle^{r_1}+|\lambda^*|)^{-q}\|\mathrm{Adj}(A(\xi)+\lambda^* I_q)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^q)},$$

para todo $\xi\in\mathbb{R}^n$ con $|\xi|\ge R,\ \mu\in\mathbb{R}_0^+,\ \ \theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. (1.1)

Busquemos a continuación un estimativo apropiado para

$$\|\mathrm{Adj}(A(\xi)+\lambda^* I_q)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^q)}.$$

Dado que la adjunta es la traspuesta de la matriz de cofactores, se tiene que cada entrada de la matriz $\mathrm{Adj}(A(\xi)+\lambda^* I_q)$ es de la forma

$$\varphi_{ij}(\xi,\lambda^*) := (-1)^{i+j}det(A(\xi)+\lambda^* I_q)^{(i)}_{(j)},$$

donde $(A(\xi)+\lambda^* I_q)^{(i)}_{(j)}$ representa el j,i-ésimo menor, que es la matriz que se obtiene eliminando la j-ésima fila y la i-ésima columna de la matriz $(A(\xi)+\lambda^* I_q)$.

Ahora, si denotamos por $Z_{(i)}$ al conjunto $\{1,2,\cdots,q\}-\{i\}$, se tiene entoces que $det(A(\xi)+\lambda^* I_q)^{(i)}_{(j)}$ es una combinación lineal de términos de la forma:

$$(a_{i_1,i_1}(\xi)+\lambda^*)\ldots(a_{i_k,i_k}(\xi)+\lambda^*)a_{i_{k+1},\pi(i_{k+1})}(\xi)\cdots a_{i_{q-1},\pi(i_{q-1})}(\xi), \quad (1.2)$$

donde $\pi: Z_{(j)}\longrightarrow Z_{(i)}$ es una biyección para $Z_{(j)}=\{i_1,\cdots,i_{q-1}\}$. Además, si $i\neq j$, entonces $0\le k\le q-1$ y si $i=j$, entonces $0\le k\le q-2$.

Nótese también que :

$$\begin{aligned}|a_{i_m,i_m}(\xi)+\lambda^*| &\le |a_{i_m,i_m}(\xi)|+|\lambda^*|\\ &\le C_{0,m}\langle\xi\rangle^{r_1}+|\lambda^*|\\ &\le \max\{1,C_{0,m}\}(\langle\xi\rangle^{r_1}+|\lambda^*|)\\ &= C^*_{0,m}(\langle\xi\rangle^{r_1}+|\lambda^*|),\end{aligned}$$

es decir,

$$|a_{i_m,i_m}(\xi)+\lambda^*| \leq C^*_{0,m}(\langle\xi\rangle^{r_1}+|\lambda^*|) \tag{1.3}$$

y puesto que

$$|a_{i_t,\pi(i_t)}(\xi)| \leq |a_{i_t,\pi(i_t)}(\xi)|+|\lambda^*|,$$

se deduce análogamente que

$$|a_{i_t,\pi(i_t)}(\xi)| \leq C^*_{0,t}(\langle\xi\rangle^{r_1}+|\lambda^*|). \tag{1.4}$$

De las expresiones (1.2), (1.3) y (1.4) se sigue que

$$|(a_{i_1,i_1}(\xi)+\lambda^*)\cdots(a_{i_k,i_k}(\xi)+\lambda^*).a_{i_{k+1},\pi(i_{k+1})}(\xi)\cdots a_{i_{q-1},\pi(i_{q-1})}(\xi)| \leq C^*_k(\langle\xi\rangle^{r_1}+|\lambda^*|)^{q-1}. \tag{1.5}$$

Ahora, como cada $\varphi_{ij}(\xi,\lambda^*)=(-1)^{i+j}\det(A(\xi)+\lambda^* I_q)^{(i)}_{(j)}$ es una combinación lineal de elementos descritos en (1.2), entonces por (1.5) se sigue que

$$\begin{aligned}|\varphi_{ij}(\xi,\lambda^*)| &\leq C^*_{ij}(\langle\xi\rangle^{r_1}+|\lambda^*|)^{q-1}\\ &\leq M(\langle\xi\rangle^{r_1}+|\lambda^*|)^{q-1}, \quad \text{con } M:=\max_{i,j=1\cdots q} C^*_{ij}\end{aligned}$$

para todo $i,j=1\cdots q$, osea que

$$|\varphi_{ij}(\xi,\lambda^*)| \leq M(\langle\xi\rangle^{r_1}+|\lambda^*|)^{q-1} \quad \forall i,j=1\cdots q. \tag{1.6}$$

Para cada $x := (x_1,\ x_2, \ldots,\ x_q)^T \in \mathbb{C}^q$ con $|x| = 1$, se tiene entonces lo siguiente :

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{Adj}(A(\xi)+\lambda^* I_q)x\|_{\mathbb{C}^q} &= \left\| \left(\sum_{j=1}^{q} \varphi_{1j}(\xi,\lambda^*)x_j, \cdots, \sum_{j=1}^{q} \varphi_{qj}(\xi,\lambda^*)x_j \right)^T \right\|_{\mathbb{C}^q} \\
&\leq \sum_{i=1}^{q} \Big| \sum_{j=1}^{q} \varphi_{ij}(\xi,\lambda^*)x_j \Big| \\
&\leq \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{q} |\varphi_{ij}(\xi,\lambda^*)|.|x_j| \\
&\leq \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{q} |\varphi_{ij}(\xi,\lambda^*)| \\
&\leq \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{q} M(\langle\xi\rangle^{r_1} + |\lambda^*|)^{q-1} \text{ , por (1.6),} \\
&= Mq^2(\langle\xi\rangle^{r_1} + |\lambda^*|)^{q-1},
\end{aligned}$$

es decir

$$\|\mathrm{Adj}(A(\xi)+\lambda^* I_d)x\|_{\mathbb{C}^q} \leq Mq^2(\langle\xi\rangle^{r_1} + |\lambda^*|)^{q-1}, \quad \forall x \in \mathbb{C}^q \text{ con } |x| = 1.$$

En consecuencia,

$$\sup_{\substack{x\in\mathbb{C}^q \\ |x|=1}} \|\mathrm{Adj}(A(\xi)+\lambda^* I_d)x\|_{\mathbb{C}^q} \leq Mq^2(\langle\xi\rangle^{r_1} + |\lambda^*|)^{q-1}$$

y así

$$\|\mathrm{Adj}(A(\xi)+\lambda^* I_d)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^q)} \leq Mq^2(\langle\xi\rangle^{r_1} + |\lambda^*|)^{q-1}. \tag{1.7}$$

Ahora, de (1.1) y (1.7) se sigue que:

$$\|(A(\xi)+\lambda^* I_q)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^q)} \leq C^{-1}Mq^2(\langle\xi\rangle^{r_1} + |\lambda^*|)^{-1}, \tag{1.8}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ con $|\xi| \geq R,\ \mu \in \mathbb{R}_0^+,\ \ \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, donde $\lambda^* = \mu^{r_1}e^{i\theta}$.

Dado que

$$
\begin{aligned}
(1+|\xi|^2+\mu^2)^{\frac{r_1}{2}} &= \left((1+|\xi|^2)+\mu^2\right)^{\frac{r_1}{2}} \\
&\leq 2^{\frac{r_1}{2}}\left((1+|\xi|^2)^{\frac{r_1}{2}}+\mu^{r_1}\right) \qquad \text{Lema 1.2.10} \\
&= 2^{\frac{r_1}{2}}\left(\langle\xi\rangle^{r_1}+|\lambda^*|\right),
\end{aligned}
$$

entonces

$$
(\langle\xi\rangle^{r_1}+|\lambda^*|)^{-1} \leq 2^{\frac{r_1}{2}}(1+|\xi|^2+\mu^2)^{-\frac{r_1}{2}},
$$

esto es,

$$
(\langle\xi\rangle^{r_1}+|\lambda^*|)^{-1} \leq 2^{\frac{r_1}{2}}\langle\xi,\mu\rangle^{-r_1}. \tag{1.9}
$$

Luego de las expresiones (1.8) y (1.9) se obtiene que para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ con $|\xi| \geq R,\ \mu \in \mathbb{R}_0^+$ y $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ se verifica que

$$
\|(A(\xi)+\lambda^* I_q)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^q)} \leq \kappa_1\langle\xi,\mu\rangle^{-r_1},
$$

donde, $\kappa_1 := C^{-1}Mq^2 2^{\frac{r_1}{2}}$. Con lo cual la afirmación (I) queda probada.

Ahora veamos la prueba de la afirmación (II).

Es claro que existe una constante $1 < M < \infty$ tal que

$$
\sup_{|\xi|\leq R} ||A(\xi)||_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^q)} < M.
$$

Ahora como el espectro de $A(\xi)$ está contenido en la bola con centro en el origen y radio $\|A(\xi)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^q)}$, se sigue que la aplicación

$$
A(\xi) + \mu^{r_1}e^{i\theta}I_q : \mathbb{C}^q \longrightarrow \mathbb{C}^q
$$

es biyectiva para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ con $|\xi| \leq R$, $\mu \geq M$ y $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Por otro lado es claro que

$$
\lim_{\mu\to\infty} \frac{(1+R^2+\mu^2)^{\frac{r_1}{2}}}{\mu^{r_1}-M} = 1
$$

luego existe un $\mu_0 > \max\{M^{\frac{1}{r_1}}, M\}$ tal que

$$
\tfrac{(1+R^2+\mu^2)^{\frac{r_1}{2}}}{\mu^{r_1}-M} < \tfrac{3}{2} \qquad \forall\mu \geq \mu_0. \tag{1.10}
$$

De eso obtenemos que $\forall\xi \in \mathbb{R}^n$ con $|\xi| \leq R$, $\mu \geq \mu_0$ y $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$:

$$
\begin{aligned}
\|(A(\xi)+\mu^{r_1}e^{i\theta}I_q)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^q)} &\leq \frac{1}{|\mu^{r_1}e^{i\theta}|-\|A(\xi)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^q)}} && \text{Lema 1.2.13}\\
&\leq \frac{1}{|\mu^{r_1}e^{i\theta}|-M}\\
&= \frac{1}{\mu^{r_1}-M}\\
&\leq \frac{3}{2}\frac{1}{(1+R^2+\mu^2)^{\frac{r_1}{2}}} && \text{por (1.10)}\\
&\leq \frac{3}{2}\frac{1}{(1+|\xi|^2+\mu^2)^{\frac{r_1}{2}}}\\
&= \frac{3}{2}\langle\xi,\mu\rangle^{-r_1}
\end{aligned}
$$

esto es

$$\|(A(\xi)+\mu^{r_1}e^{i\theta}I_q)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^q)} \leq \frac{3}{2}\langle\xi,\mu\rangle^{-r_1}.$$

Con lo cual la afirmación (II) queda probada.

Ahora de las afirmaciones (I) y (II) escogiendo $\kappa = \text{máx}\left\{\kappa_1, \frac{3}{2}\right\}$ y $\omega = \sqrt{R^2+\mu_0^2}$, se tiene que para todo $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ y $\mu \geq 0$ con $|\xi,\mu| \geq \omega$:

$$A(\xi)+\mu^{r_1}e^{i\theta}I_q : \mathbb{C}^q \longrightarrow \mathbb{C}^q \;\; \text{es invertible},$$

$$[A(\xi)+\mu^{r_1}e^{i\theta}I_q]^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^q)$$

y

$$\|(A(\xi)+\mu^{r_1}e^{i\theta}I_q)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^q)} \leq \kappa\cdot\langle\xi,\mu\rangle^{-r_1}.$$

Lo cual demuestra que, $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}^q)$ es parabólico en $S^{r_1,\rho}_{1,0}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{C}^q))$.
□

Veamos ahora que sin la hipótesis de que $l_1 = \cdots = l_q$ y $m_1 = \cdots = m_q$, el resultado anterior no es válido en general. Para ello presentamos a continuación un contraejemplo.

3.1.2 Teorema. Sea $\eta > 0$ y definamos

$$
\begin{aligned}
A : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)\\
\xi \;\; \mapsto \;\; A(\xi) &:= \begin{pmatrix} \chi(\xi)|\xi|^{\eta} & 0\\ 0 & \chi(\xi)\end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

donde $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n),\ 0 \leq \chi \leq 1$, pero con

$$\chi(\xi) := \begin{cases} 0 & , \ si\ |\xi| \leq 1, \\ 1 & , \ si\ |\xi| \geq 2. \end{cases}.$$

Entonces $A(D)$ es un sistema Douglis-Nirenberg $\Lambda(\phi)$ elíptico con $0 < \theta < \pi$, que no es parabólico en $S^{r,\rho}_{1,0}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{C}^2))$ para todo $r > 0$, $\rho \in \mathbb{N}_0$.

Demostración. Mostremos la afirmación inicial. Para ello definamos $m_1 := \eta$ y $m_2 = l_1 = l_2 := 0$. Entonces $r_1 = \eta$, $r_2 = 0$ y además $m_1 + l_2 = m_2 + l_1 = 0$, también es claro que $r_1 > r_2$. Como

$$a_{11}(\xi) = \chi(\xi)|\xi|^\eta, \quad a_{12}(\xi) = a_{21}(\xi) = 0 \ \ y \ \ a_{22}(\xi) = \chi(\xi),$$

entonces

$$\begin{gathered} a_{11}(\xi) \in S^{r_1}(\mathbb{R}^n), \\ a_{12}(\xi) \in S^0(\mathbb{R}^n) = S^{l_1+m_2}(\mathbb{R}^n) \text{ y} \\ a_{21}(\xi) \in S^0(\mathbb{R}^n) = S^{l_2+m_1}(\mathbb{R}^n). \end{gathered}$$

Ahora veamos que

$$a_{22}(\xi) = \chi(\xi) \in S^0(\mathbb{R}^n).$$

En efecto por hipótesis tenemos que $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Tomemos entonces $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ arbitrario pero fijo, y distingamos dos casos:

(a) Si $\alpha = 0_{\mathbb{N}_0^n}$, se sigue que

$$|\partial_\xi^{0_{\mathbb{N}_0^n}} \chi(\xi)| = |\chi(\xi)| \leq 1 = \langle \xi \rangle^{0-|0_{\mathbb{N}_0^n}|} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

(b) Si $\alpha \neq 0_{\mathbb{N}_0^n}$, se tiene para $\xi \in \mathbb{R}^n$ con $|\xi| < 1$ ó $|\xi| > 2$ que $|\partial_\xi^\alpha \chi(\xi)| = 0$ y en consecuencia

$$|\partial_\xi^\alpha \chi(\xi)| = 0 < \langle \xi \rangle^{0-|\alpha|}.$$

Por otro lado, para $\xi \in \mathbb{R}^n$ con $1 \leq |\xi| \leq 2$, se tiene que

$$1 + |\xi| \leq 2|\xi| \Leftrightarrow 2(1 + |\xi|) \leq 4|\xi|,$$

de donde se sigue que

$$\frac{2}{|\xi|} \leq \frac{4}{1+|\xi|} \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \text{ con } 1 \leq |\xi| \leq 2. \tag{2.1}$$

Dado $1 \leq |\xi| \leq 2$, se infiere también que

$$1 \leq \frac{2}{|\xi|}. \tag{2.2}$$

De (2.1) y (2.2) se tiene que $1 \leq \dfrac{4}{1+|\xi|}$, lo cual implica que

$$1 \leq \frac{16}{(1+|\xi|)^2}.$$

Como $\dfrac{1}{(1+|\xi|)^2} \leq \dfrac{1}{1+|\xi|^2}$, entonces

$$1 \leq \frac{16}{1+|\xi|^2},$$

y como $\frac{|\alpha|}{2} > 0$, resulta para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ con $1 \leq |\xi| \leq 2$ que

$$1 \leq 4^{|\alpha|}\langle\xi\rangle^{-|\alpha|}.$$

Ahora, el conjunto

$$K := \{\xi \in \mathbb{R}^n : 1 \leq |\xi| \leq 2\}$$

es compacto en $\mathbb{R}^n$ y la función $\partial_\xi^\alpha \chi(\xi)$ es continua en $\mathbb{R}^n$, en particular sobre K. Entonces la restricción de $\partial_\xi^\alpha \chi(\xi)$ a K toma su valor máximo en K, es decir,

$$C_\alpha := \max_{\zeta \in K} |\partial_\zeta^\alpha \chi(\zeta)| < \infty,$$

luego para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ se sigue que

$$\begin{aligned} |\partial_\xi^\alpha \chi(\xi)| &\leq \max_{\zeta \in K} |\partial_\zeta^\alpha \chi(\zeta)| \\ &= C_\alpha \\ &\leq C_\alpha 4^{|\alpha|}\langle\xi\rangle^{-|\alpha|}. \end{aligned}$$

De (a) y (b) se concluye que para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ existe una constante M_α positiva tal que:

$$|\partial_\xi^\alpha \chi(\xi)| \leq M_\alpha \langle\xi\rangle^{-|\alpha|} \quad \text{para todo } \xi \in \mathbb{R}^n,$$

lo que demuestra que $\chi(\xi) \in S^0(\mathbb{R}^n)$. Así se tiene entonces que para todo $i, j = 1, 2$

$$a_{ij}(\xi) \in S^{l_i+m_j}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$$

y los números $r_i := l_i + m_i$ con $i = 1, 2$ satisfacen

$$r_1 > r_2 = 0.$$

Esto muestra que $A(D)$ es un sistema Douglis-Nirenberg.

Mostremos a continuación que $A(D)$ es $\Lambda(\phi)$ elíptico, con $0 < \phi < \pi$ fijo. En efecto, definamos $M := (\text{mín}\{1, 1 - \cos\theta\})^{\frac{1}{2}}$. Así para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ con $|\xi| \geq 2$ y $\lambda \in \Lambda(\phi)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
|\det(A(\xi) - \lambda I_2)| &= \big||\xi|^{r_1} - \lambda\big|\big|1 - \lambda\big| \\
&\geq M(|\xi|^{2r_1} + |\lambda|^2)^{\frac{1}{2}} M(1 + |\lambda|^2)^{\frac{1}{2}} && \text{Lema } \mathbf{1.2.7} \\
&\geq \frac{M^2}{4}(|\xi|^{r_1} + |\lambda|)(1 + |\lambda|) && \text{Lema } \mathbf{1.2.9} \\
&= \frac{M^2}{4 \cdot 2^{r_1}}(2^{r_1}|\xi|^{r_1} + 2^{r_1}|\lambda|)(1 + |\lambda|) \\
&\geq \frac{M^2}{4 \cdot 2^{r_1}}(\langle\xi\rangle^{r_1} + |\lambda|)(\langle\xi\rangle^0 + |\lambda|) && \text{Lema } \mathbf{1.2.8} \\
&= C(\langle\xi\rangle^{r_1} + |\lambda|)(\langle\xi\rangle^0 + |\lambda|)
\end{aligned}$$

donde $C := \frac{M^2}{4 \cdot 2^{r_1}}$. En consecuencia, para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ con $|\xi| \geq 2$ y $\lambda \in \Lambda(\phi)$:

$$|\det(A(\xi) - \lambda I_2)| \geq C(\langle\xi\rangle^{r_1} + |\lambda|)(\langle\xi\rangle^0 + |\lambda|),$$

lo cual muestra que $A(D)$ es un sistema Douglis-Nirenberg $\Lambda(\phi)$ elíptico. Veamos ahora que éste no es parabólico. Razonemos por el absurdo, supongamos que existe un $r \in \mathbb{R}^+$ y un $\rho \in \mathbb{N}_0$ tal que

$$A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$$

es parabólico en $S^{r,\rho}_{1,0}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{C}^2))$.

Entonces por definición se tiene que existen constantes $\omega \geq 0$ y $\kappa > 0$ tales que:

$$\begin{gathered}
(A(\xi) + \mu^r e^{i\theta} I_2)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2), \\
\text{y } \|(A(\xi) + \mu^r e^{i\theta} I_2)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)} \leq \kappa\langle\xi, \mu\rangle^{-r}
\end{gathered} \tag{2.4}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}^+_0$ con $|\xi, \mu| \geq w$, y para todo $\phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. En particular la expresión (2.4) sigue siendo válida cuando $\mu = w$, $\phi = 0$ y $|\xi| \geq 2$ esto es:

$$(A(\xi) + w^r I_2)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$$

$$\text{y } \|(A(\xi) + w^r I_2)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)} \leq \kappa\langle \xi, w\rangle^{-r}. \tag{2.5}$$

Ahora para $\xi \in \mathbb{R}^n$ con $|\xi| \geq 2$ se tiene que :

$$(A(\xi) + w^r I_2) = \begin{pmatrix} |\xi|^{r_1} + w^r & 0 \\ 0 & 1 + w^r \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\mathrm{Adj}(A(\xi) + w^r I_2) = \begin{pmatrix} 1 + w^r & 0 \\ 0 & |\xi|^{r_1} + w^r \end{pmatrix},$$

$$\det(A(\xi) + w^r I_2) = (|\xi|^{r_1} + w^r)(1 + w^r),$$

y

$$(A(\xi) + w^r I_2)^{-1} = \frac{1}{(|\xi|^{r_1} + w^r)(1 + w^r)} \cdot \mathrm{Adj}(A(\xi) + w^r I_2).$$

Ahora, de (2.5) se tiene que:

$$\|(A(\xi) + w^r I_2)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)} \leq \kappa\langle \xi, w\rangle^{-r}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\langle \xi, w\rangle^r}{(|\xi|^{r_1} + w^r)(1 + w^r)} \cdot \|\mathrm{Adj}(A(\xi) + w^r I_2)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)} \leq \kappa. \tag{2.6}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \|\mathrm{Adj}(A(\xi) + w^r I_2)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)} &= \sup_{\substack{x \in \mathbb{C}^2 \\ |x|=1}} \|\mathrm{Adj}(A(\xi) + w^r)x\|_{\mathbb{C}^2} \\ &\geq \|\mathrm{Adj}(A(\xi) + w^r)e_2\|_{\mathbb{C}^2} \\ &= \|(0, |\xi|^{r_1} + w^r)^T\|_{\mathbb{C}^2} \\ &= |\xi|^{r_1} + w^r, \end{aligned}$$

donde $e_2 := (0,1)^T$. Es decir:

$$|\xi|^{r_1} + w^r \leq \|\mathrm{Adj}(A(\xi) + w^r I_2)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)}. \tag{2.7}$$

De las expresiones (2.6) y (2.7) se obtiene que :

$$\frac{\langle \xi, w\rangle^r \cdot (|\xi|^{r_1} + w^r)}{(|\xi|^{r_1} + w^r)(1 + w^r)} \leq \kappa,$$

osea que

$$\frac{(1+|\xi|^2+w^2)^{\frac{r}{2}}}{(1+w^r)} \leq \kappa. \tag{2.8}$$

Si se hace tender $|\xi| \longrightarrow +\infty$ se verifica que:

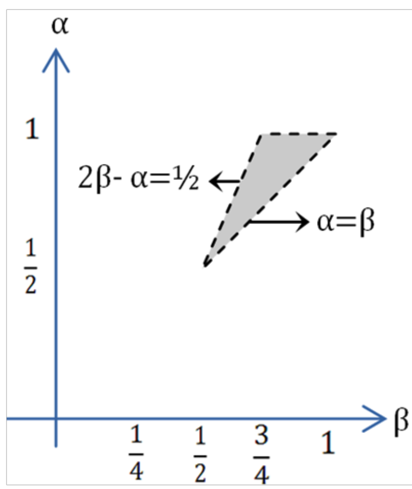
$$\frac{(1+|\xi|^2+w^2)^{\frac{r}{2}}}{(1+w^r)} \longrightarrow +\infty,$$

lo cual es una contradicción con (2.8), ya que κ es finito. Luego para todo $r > 0$ y $\rho \in \mathbb{N}_0$ se tiene que

$$A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$$

no es parabólico en $S^{r,\rho}_{1,0}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{C}^2))$. $\square$

El siguiente teorema muestra que el símbolo asociado a las ecuaciones generalizadas de una placa termo-elástica no es parabólico en el interior de la región de la siguiente figura



.

3.1.3 Teorema. Sean χ como en el Corolario **1.2.11**, $\eta > 0$ y $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ tal que $\alpha > \beta$ y $2\beta - \alpha > \frac{1}{2}$,

$$A(\xi) := \begin{pmatrix} \chi(\xi)|\xi|^{2\alpha\eta} & \chi(\xi)|\xi|^{2\beta\eta} & 0 \\ -\chi(\xi)|\xi|^{2\beta\eta} & 0 & \chi(\xi)|\xi|^{\eta} \\ 0 & -\chi(\xi)|\xi|^{\eta} & 0 \end{pmatrix}, \ \xi \in \mathbb{R}^n,$$

Entonces, para todo $r \in \mathbb{R}^+$ y para todo $\rho \in \mathbb{N}_0$ el símbolo

$$\begin{aligned} A : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}^3) \\ \xi \ &\mapsto \ A(\xi) \end{aligned}$$

no es parabólico en $S^{r,\rho}_{1,0}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{C}^3))$.

Demostración. Razonemos por el absurdo, supongamos que existen $r \in \mathbb{R}^+$ y $\rho \in \mathbb{N}_0$ tales que

$$A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$$

sea parabólico en $S^{r,\rho}_{1,0}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{C}^3))$.

Entonces por definición se tiene que:

$$A \in S^{r,\rho}_{1,0}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)),$$

y existen constantes $w \geq 0$ y $\kappa > 0$ tales que:

$$(A(\xi) + u^r e^{i\theta} I_3)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$$

$$\text{y} \quad \|(A(\xi) + \mu^r e^{i\theta} I_3)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^3)} \leq \kappa \langle \xi, \mu \rangle^{-r} \tag{3.1}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n,\ \mu \in \mathbb{R}^+_0$ con $|\xi, \mu| \geq w$ y $\phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Diferenciemos dos casos para r

(a) Supongamos que $r \leq r_3$. Para $\alpha = 0_{\mathbb{N}^n_0}$ se tiene que $|\alpha| = 0 \leq \rho$, y por tanto existe un $C_0 \in \mathbb{R}^+$ tal que:

$$\left\| \partial_\xi^{0_{\mathbb{N}^n_0}} A(\xi) \right\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^3)} \leq C_0 \langle \xi \rangle^{r - |\ 0_{\mathbb{N}^n_0}|}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Es decir,

$$\|A(\xi)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^3)} \leq C_0 \langle \xi \rangle^r \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{3.2}$$

Por otro lado tenemos que para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ con $|\xi| \geq 2$:

$$\begin{aligned} \|A(\xi)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^3)} &= \sup_{\substack{x \in \mathbb{C}^3 \\ |x|=1}} \|A(\xi)x\|_{\mathbb{C}^3} \\ &\geq \|A(\xi)e_1\|_{\mathbb{C}^3} \\ &= \|(|\xi|^{2\alpha\eta}, -|\xi|^{2\beta\eta}, 0)^T\|_{\mathbb{C}^3} \\ &\geq |\xi|^{2\alpha\eta}, \end{aligned}$$

donde $e_1 := (1,0,0)^T$. Esto es

$$|\xi|^{2\alpha\eta} \leq \|A(\xi)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^3)} \quad \forall |\xi| \geq 2. \tag{3.3}$$

De (3.2) y (3.3) resulta para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ con $|\xi| \geq 2$ que

$$|\xi|^{2\alpha\eta} \leq C_0 \langle \xi \rangle^r, \text{o equivalentemente, } \frac{|\xi|^{r_1}}{\langle \xi \rangle^r} \leq C_0,$$

donde $r_1 = 2\alpha\eta$, lo anterior es equivalente a decir que para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ con $|\xi| \geq 2$:

$$\frac{|\xi|^{r_1 - r}}{(\frac{1}{|\xi|^2} + 1)^{\frac{r}{2}}} \leq C_0. \tag{3.4}$$

Ahora como $r \leq r_3$ y por hipótesis $r_3 < r_1$, se tiene entonces que $r_1 - r > 0$.

De esto y $(3, 4)$ se observa que

$$\frac{|\xi|^{r_1 - r}}{(\frac{1}{|\xi|^2} + 1)^{\frac{r}{2}}} \longrightarrow +\infty, \text{ cuando } |\xi| \to +\infty,$$

lo cual es una cotradicción con (3,4), ya que C_0 es finito.

(b) Supongamos ahora que $r > r_3$. Considerando $\mu = w$ y $\phi = 0$ en (3.1), resulta para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ con $|\xi| \geq 2$, que

$$\|(A(\xi) + w^r I_3)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^3)} \leq \kappa \langle \xi, w \rangle^{-r}. \tag{3.5}$$

Note que

$$A(\xi) + w^r I_3 = \begin{pmatrix} |\xi|^{2\alpha\eta} + w^r & |\xi|^{2\beta\eta} & 0 \\ -|\xi|^{2\beta\eta} & w^r & |\xi|^\eta \\ 0 & -|\xi|^\eta & w^r \end{pmatrix}, \quad \forall |\xi| \geq 2,$$

tiene cofactores :

$$\begin{array}{lll} c_{11} = w^{2r} + |\xi|^{2\eta}, & c_{12} = w^r |\xi|^{2\eta\beta}, & c_{13} = |\xi|^{2\eta\beta} |\xi|^\eta, \\ c_{21} = -w^r |\xi|^{2\eta\beta}, & c_{22} = w^r (w^r + |\xi|^{2\alpha\eta}), & c_{23} = |\xi|^\eta (w^r + |\xi|^{2\alpha\eta}), \\ c_{31} = |\xi|^{2\eta\beta} |\xi|^\eta, & c_{32} = -|\xi|^\eta (w^r + |\xi|^{2\alpha\eta}), & c_{33} = w^r (w^r + |\xi|^{2\alpha\eta}) + |\xi|^{4\beta\eta}. \end{array}$$

Por lo tanto para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ con $|\xi| \geq 2$

$$\mathrm{Adj}(A(\xi) + w^r I_3) = \begin{pmatrix} w^{2r} + |\xi|^{2\eta} & w^r |\xi|^{2\beta\eta} & |\xi|^{2\eta\beta} |\xi|^\eta \\ -w^r |\xi|^{2\eta\beta} & w^r (w^r + |\xi|^{2\alpha\eta}) & |\xi|^\eta (w^r + |\xi|^{2\alpha\eta}) \\ |\xi|^{2\eta\beta} |\xi|^\eta & -|\xi|^\eta (w^r + |\xi|^{2\alpha\eta}) & w^r (w^r + |\xi|^{2\alpha\eta}) + |\xi|^{4\beta\eta} \end{pmatrix},$$

con eso

$$\begin{aligned}\|\mathrm{Adj}(A(\xi)+w^rI_3)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^3)} &= \sup_{\substack{x\in\mathbb{C}^3\\|x|=1}}\|\mathrm{Adj}(A(\xi)+w^rI_3)x\|_{\mathbb{C}^3}\\ &\geq \|\mathrm{Adj}(A(\xi)+w^rI_3)e_3\|_{\mathbb{C}^3}\\ &= \left\|\left(|\xi|^{2\eta\beta}|\xi|^{\eta}, |\xi|^{\eta}(w^r+|\xi|^{2\alpha\eta}), w^r(w^r+|\xi|^{2\alpha\eta})+|\xi|^{4\beta\eta}\right)^T\right\|\\ &\geq |\xi|^{4\beta\eta},\end{aligned}$$

donde $e_3 := (0,0,1)^T$. Es decir,

$$|\xi|^{4\beta\eta} \leq \|\mathrm{Adj}(A(\xi)+w^rI_3)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^3)} \quad \forall|\xi|\geq 2. \tag{3.6}$$

Nótese también que

$$\det(A(\xi)+w^rI_3) = \left(w^{2r}+|\xi|^{2\eta}\right)\left(w^r+|\xi|^{2\alpha\eta}\right)+w^r|\xi|^{4\beta\eta} \tag{3.7}$$

y

$$\|(A(\xi)+w^rI_3)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^3)} = \frac{1}{|\det(A(\xi)+w^rI_3)|}\|\mathrm{Adj}(A(\xi)+w^rI_3)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^3)}.$$

(3.8)

Ahora de las expresiones (3.5),(3.6),(3.7) y (3.8) se sigue que:

$$\frac{\langle\xi,w\rangle^r}{|\det(A(\xi)+w^rI_3)|}\cdot|\xi|^{4\beta\eta} \leq \kappa,$$

equivalentemente

$$\frac{\left(1+|\xi|^2+w^2\right)^{\frac{r}{2}}\cdot|\xi|^{4\beta\eta}}{\left|(w^{2r}+|\xi|^{2\eta})(w^r+|\xi|^{2\alpha\eta})+w^r|\xi|^{4\beta\eta}\right|} \leq \kappa$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(1+|\xi|^2+w^2\right)^{\frac{r}{2}}\cdot|\xi|^{4\beta\eta}}{\left|(w^{2r}+|\xi|^{2\eta})(w^r+|\xi|^{2\alpha\eta})+w^r|\xi|^{4\beta\eta}\right|} \leq \kappa$$

$$\Leftrightarrow \frac{|\xi|^{r+4\beta\eta}\cdot\left(\frac{1}{|\xi|^2}+1+\frac{w^2}{|\xi|^2}\right)^{\frac{r}{2}}}{\left||\xi|^{2\alpha\eta}\left(1+\frac{w^r}{|\xi|^{2\alpha\eta}}\right)\cdot|\xi|^{2\eta}\left(\frac{w^{2r}}{|\xi|^{2\eta}}+1\right)+w^r|\xi|^{4\beta\eta}\right|} \leq \kappa$$

$$\Leftrightarrow \frac{|\xi|^{r+4\beta\eta}\cdot\left(\frac{1}{|\xi|^2}+1+\frac{w^2}{|\xi|^2}\right)^{\frac{r}{2}}}{\left||\xi|^{2\alpha\eta+2\eta}\left(1+\frac{w^r}{|\xi|^{2\alpha\eta}}\right)\cdot\left(\frac{w^{2r}}{|\xi|^{2\eta}}+1\right)+w^r|\xi|^{4\beta\eta}\right|} \leq \kappa$$

$$\Leftrightarrow \frac{|\xi|^{r+4\beta\eta}.\left(\frac{1}{|\xi|^2}+1+\frac{w^2}{|\xi|^2}\right)^{\frac{r}{2}}}{|\xi|^{(2\alpha+2)\eta}\cdot\left|\left(1+\frac{w^r}{|\xi|^{2\alpha\eta}}\right)\cdot\left(\frac{w^{2r}}{|\xi|^{2\eta}}+1\right)+\frac{w^r}{|\xi|^{(2\alpha+2)\eta-4\beta\eta}}\right|} \leq \kappa$$

$$\Leftrightarrow \frac{|\xi|^{r+4\beta\eta-(2\alpha+2)\eta}\left(\frac{1}{|\xi|^2}+1+\frac{w^2}{|\xi|^2}\right)^{\frac{r}{2}}}{\left|\left(1+\frac{w^r}{|\xi|^{2\alpha\eta}}\right)\cdot\left(\frac{w^{2r}}{|\xi|^{2\eta}}+1\right)+\frac{w^r}{|\xi|^{(2\alpha+2)\eta-4\beta\eta}}\right|} \leq \kappa \tag{3.9}$$

Ahora si $\eta > 0$ y $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ son tales que $\alpha > \beta$ y $2\beta - \alpha > \frac{1}{2}$, entonces se tiene que

$$2\alpha \leq 2. \tag{3.10}$$

De la desigualdad $\beta < \alpha$ y de (3.10) se obtiene que:

$$4\beta < 2\alpha + 2,$$

y en consecuencia

$$4\beta\eta < (2\alpha + 2)\eta.$$

De esta manera

$$(2\alpha + 2)\eta - 4\beta\eta > 0. \tag{3.11}$$

Por otro lado, del supuesto $r > r_3$ se sigue que

$$\begin{aligned} r + 4\beta\eta - (2\alpha + 2)\eta &> r_3 + 4\beta\eta - (2\alpha + 2) \\ &= 2\eta(1 + \alpha - 2\beta) + 4\beta\eta - 2\alpha\eta - 2\eta \\ &= 2\eta + 2\alpha\eta - 4\beta\eta + 4\beta\eta - 2\alpha\eta - 2\eta \\ &= 0, \end{aligned}$$

esto es,

$$r + 4\beta\eta - (2\alpha + 2)\eta > 0. \tag{3.12}$$

Si definimos $p := r + 4\beta\eta - (2\alpha+2)\eta$ y $q := (2\alpha+2)\eta - 4\beta\eta$ entonces de (3.11) y (3.12) se sigue que p y q son positivos y la expresión (3.9) se transforma en:

$$\frac{|\xi|^p\left(\frac{1}{|\xi|^2}+1+\frac{w^2}{|\xi|^2}\right)^{\frac{r}{2}}}{\left|\left(1+\frac{w^r}{|\xi|^{2\alpha\eta}}\right)\cdot\left(\frac{w^{2r}}{|\xi|^{2\eta}}+1\right)+\frac{w^r}{|\xi|^q}\right|} \leq \kappa, \quad \forall|\xi| \geq 2.$$

Haciendo tender $|\xi| \longrightarrow +\infty$ resulta que

$$\frac{|\xi|^p\left(\frac{1}{|\xi|^2}+1+\frac{w^2}{|\xi|^2}\right)^{\frac{r}{2}}}{\left|\left(1+\frac{w^r}{|\xi|^{2\alpha\eta}}\right)\cdot\left(\frac{w^{2r}}{|\xi|^{2\eta}}+1\right)+\frac{w^r}{|\xi|^q}\right|} \longrightarrow +\infty$$

lo cual es una contradicción con la desigualdad anterior.

De esta manera concluimos que para todo $r \in \mathbb{R}^+$ y $\rho \in \mathbb{N}_0$, el símbolo

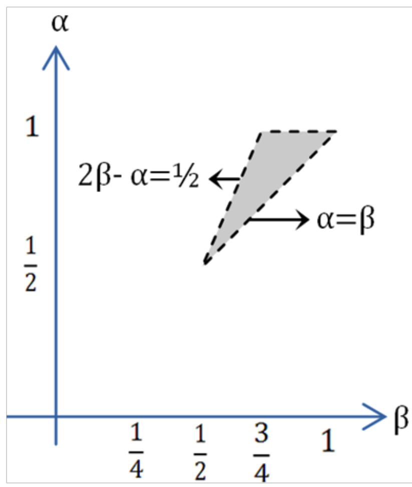
$$A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$$

no es parabólico en $S^{r,\rho}_{1,0}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{C}^3))$. $\square$

3.1.4 Observación. Dado que A(D) en el teorema precedente es también un sistema D-N $\Lambda(\phi)$ elíptico en la frontera de la región

$$T := \left\{ (\beta, \alpha) \in [0,1] \times [0,1] : \ \alpha \geq \beta \ y \ 2\beta - \alpha \geq \frac{1}{2} \right\},$$

analizaremos en que puntos de la frontera de T, el símbolo $A(\xi)$ es parabólico.



.

1. Si $\alpha = \beta$ y $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ entonces en este caso los números r_1, r_2 y r_3 quedan de la siguiente manera :

$$r_1 = r_2 = 2\alpha\eta \ \ y \ \ r_3 = 2\eta(1-\alpha).$$

Procedamos de forma similar como en el teorema precedente, esto es, supongamos que existen $r \in \mathbb{R}^+$ y $\rho \in \mathbb{N}_0$ tales que

$$A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$$

sea parabólico en $S^{r,\rho}_{1,0}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{C}^3))$.

Entonces por definición se tiene que:

$$A \in S^{r,\rho}_{1,0}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)),$$

y existen constantes $w \geq 0$ y $\kappa > 0$ tales que:

$$(A(\xi) + u^r e^{i\theta} I_3)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$$

y

$$\|(A(\xi) + \mu^r e^{i\theta} I_3)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^3)} \leq \kappa \langle \xi, \mu \rangle^{-r}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n,\ \mu \in \mathbb{R}_0^+$ con $|\xi, \mu| \geq w$ y $\phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Diferenciemos dos casos:

Caso 1. Supongamos que $r \leq r_3$. Obsérvese que la clave de la prueba para el caso (a) del teorema precedente, es la condición $r_3 < r_1$. Controlemos entonces esta condición. Dado que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, se infiere $1 < 2\alpha$ o equivalentemente $1 - \alpha < \alpha$ y como $\alpha < 1$ se sigue que $1 - \alpha < 1$. Así se tiene que $r_3 < r_1$. De esta manera llegamos a la conclusión que no existe un $r \leq r_3$ y $\rho \in \mathbb{N}_0$ tal que

$$A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$$

sea parabólico en $S_{1,0}^{r,\rho}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{C}^3))$.

Caso 2. Supongamos ahora que $r_3 < r$. Dado que $\alpha = \beta$ se sigue de la expresión (3.9) en el teorema precedente, que

$$\frac{|\xi|^{r+(2\alpha-2)\eta} \left(\frac{1}{|\xi|^2} + 1 + \frac{w^2}{|\xi|^2} \right)^{\frac{r}{2}}}{\left| \left(1 + \frac{w^r}{|\xi|^{2\alpha\eta}}\right) \cdot \left(\frac{w^{2r}}{|\xi|^{2\eta}} + 1 \right) + \frac{w^r}{|\xi|^{(2-2\alpha)\eta}} \right|} \leq \kappa. \tag{3.13}$$

Ahora mostremos que los números $p = r + (2\alpha - 2)\eta$ y $q = (2 - 2\alpha)\eta$ son positivos. En efecto, nótese que

$$r + (2\alpha - 2)\eta = r - 2\eta(1 - \alpha) = r - r_3$$

es un número positivo, pues el supuesto $r_3 < r$ lo garantiza.
Por otro lado, de la condición $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ se infiere que $(2 - 2\alpha)\eta > 0$, de esta manera los números $p = r + (2\alpha - 2)\eta$ y $q = (2 - 2\alpha)\eta$ son positivos, y así la expresión (3,13) se trasforma en

$$\frac{|\xi|^{p} \left(\frac{1}{|\xi|^2} + 1 + \frac{w^2}{|\xi|^2} \right)^{\frac{r}{2}}}{\left| \left(1 + \frac{w^r}{|\xi|^{2\alpha\eta}}\right) \cdot \left(\frac{w^{2r}}{|\xi|^{2\eta}} + 1 \right) + \frac{w^r}{|\xi|^{q}} \right|} \leq \kappa.$$

Con esta desigualdad concluímos que no existe un $r > r_3$ y $\rho \in \mathbb{N}_0$ tal que

$$A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$$

sea parabólico en $S^{r,\rho}_{1,0}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{C}^3))$.

2. Si $2\beta - \alpha = \frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2} < \beta < \frac{3}{4}$, entonces los números r_1, r_2 y r_3 quedan de la siguiente manera :

$$r_1 = 2\alpha\eta \quad y \quad r_2 = r_3 = \eta.$$

Procedamos de forma similar como en el teorema precedente, esto es, supongamos que existen $r \in \mathbb{R}^+$ y $\rho \in \mathbb{N}_0$ tales que

$$A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$$

sea parabólico en $S^{r,\rho}_{1,0}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{C}^3))$.

Entonces por definición se tiene que:

$$A \in S^{r,\rho}_{1,0}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)),$$

y existen constantes $w \geq 0$ y $\kappa > 0$ tales que:

$$(A(\xi) + u^r e^{i\theta} I_3)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$$

y

$$\|(A(\xi) + \mu^r e^{i\theta} I_3)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^3)} \leq \kappa \langle \xi, \mu \rangle^{-r}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n,\ \mu \in \mathbb{R}^+_0$ con $|\xi, \mu| \geq w$ y $\phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Ahora se analizan dos casos respecto r:

Caso 1. Sea $r \leq r_3$. Obsérvese que la clave de la prueba para el caso (a) del teorema precedente, es la condición $r_3 < r_1$, que para este caso es evidente pues $r_1 = 2\alpha\eta$ y $r_3 = \eta$. Asi el resto de la prueba es análoga, y la conclusión es que no existe un $r \leq r_3$ y $\rho \in \mathbb{N}_0$ tal que

$$A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$$

sea parabólico en $S^{r,\rho}_{1,0}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{C}^3))$.

Caso 2. Supongamos ahora que $r_3 < r$. Dado que $2\beta - \alpha = \frac{1}{2}$, la expresión (3.9) en el teorema precedente, se transforma en

$$\frac{|\xi|^{r-\eta}\left(\frac{1}{|\xi|^2}+1+\frac{w^2}{|\xi|^2}\right)^{\frac{r}{2}}}{\left|\left(1+\frac{w^r}{|\xi|^{2\alpha\eta}}\right)\cdot\left(\frac{w^{2r}}{|\xi|^{2\eta}}+1\right)-\frac{w^r}{|\xi|^{\eta}}\right|}\leq\kappa. \tag{3.14}$$

Los números $p = r - \eta$ y $q = \eta$ son positivos. En efecto, nótese que

$$r - \eta = r - r_3$$

es un número positivo, pues el supuesto $r_3 < r$ lo garantiza. De esta manera llegamos a la conclusión que no existe un $r > r_3$ y $\rho \in \mathbb{N}_0$ tal que

$$A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$$

sea parabólico en $S^{r,\rho}_{1,0}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{C}^3))$.

3. Si $\frac{3}{4} \leq \beta \leq 1$ y $\alpha = 1$, entonces los números r_1, r_2 y r_3 son los siguientes :

$$r_1 = 2\eta \quad , \quad r_2 = 2\eta(2\beta - 1) \quad y \quad r_3 = 2\eta(2 - 2\beta).$$

Procedamos de forma similar como en el teorema precedente, esto es, supongamos que existen $r \in \mathbb{R}^+$ y $\rho \in \mathbb{N}_0$ tales que

$$A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$$

sea parabólico en $S^{r,\rho}_{1,0}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{C}^3))$.

Entonces por definición se tiene que

$$A \in S^{r,\rho}_{1,0}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)),$$

y existen constantes $w \geq 0$ y $\kappa > 0$ tales que

$$(A(\xi) + u^r e^{i\theta} I_3)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$$

y

$$\|(A(\xi) + \mu^r e^{i\theta} I_3)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^3)} \leq \kappa\langle\xi, \mu\rangle^{-r}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n,\ \mu \in \mathbb{R}^+_0$ con $|\xi, \mu| \geq w$ y $\phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Consideremos dos casos respecto a r:

Caso 1. Supongamos inicialmente que $r \leq r_3$. Obsérvese que la clave de la prueba para el caso (a) del teorema precedente, es la condición $r_3 < r_1$. Dado que $\frac{3}{4} \leq \beta \leq 1$, se infiere $\frac{1}{2} < \beta$ o equivalentemente $2-2\beta<1$, y en consecuencia $2\eta(2-2\beta)<2\eta$, es decir $r_3<r_1$. De esta manera llegamos a la conclusión que no existe un $r\leq r_3$ y $\rho\in\mathbb{N}_0$ tal que

$$A:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$$

sea parabólico en $S^{r,\rho}_{1,0}(\mathbb{R}^n,\mathcal{L}(\mathbb{C}^3))$.

Caso 2. Supongamos ahora que $r_3<r$. Dado que $\alpha=1$, la expresión (3.9) en el teorema precedente, implica

$$\frac{|\xi|^{r+4\beta\eta-4\eta}\left(\frac{1}{|\xi|^2}+1+\frac{w^2}{|\xi|^2}\right)^{\frac{r}{2}}}{\left|\left(1+\frac{w^r}{|\xi|^{2\alpha\eta}}\right)\cdot\left(\frac{w^{2r}}{|\xi|^{2\eta}}+1\right)+\frac{w^r}{|\xi|^{4\eta-4\beta\eta}}\right|}\leq\kappa. \quad (3.15)$$

Si $\beta=1$, (3.15) se transforma en

$$\frac{|\xi|^{r}\left(\frac{1}{|\xi|^2}+1+\frac{w^2}{|\xi|^2}\right)^{\frac{r}{2}}}{\left|\left(1+\frac{w^r}{|\xi|^{2\alpha\eta}}\right)\cdot\left(\frac{w^{2r}}{|\xi|^{2\eta}}+1\right)+w^r\right|}\leq\kappa$$

y con esta desigualdad llegamos claramente a la misma conclusión de que A no es parabólico. Si $\frac{3}{4}\leq\beta<1$ entonces $1-\beta>0$ y por lo tanto $4\eta-4\beta\eta>0$. Nótese también que

$$r+4\beta\eta-4\eta=r-2\eta(2-2\beta)=r-r_3$$

es un número positivo, pues el supuesto r_3-r lo garantiza. De está manera los números $p=r+4\beta\eta-4\eta$ y $q=4\eta-4\beta\eta$ son positivos, y así la expresión (3.15) se transforma en

$$\frac{|\xi|^{p}\left(\frac{1}{|\xi|^2}+1+\frac{w^2}{|\xi|^2}\right)^{\frac{r}{2}}}{\left|\left(1+\frac{w^r}{|\xi|^{2\alpha\eta}}\right)\cdot\left(\frac{w^{2r}}{|\xi|^{2\eta}}+1\right)+\frac{w^r}{|\xi|^{q}}\right|}\leq\kappa.$$

Con esta desigualdad llegamos a la conclusión de que no existe un $r>r_3$ y $\rho\in\mathbb{N}_0$ tal que

$$A:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$$

sea parabólico en $S^{r,\rho}_{1,0}(\mathbb{R}^n,\mathcal{L}(\mathbb{C}^3))$.

4. Para terminar, analizamos el caso $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ en este caso, $m_1 = m_2 = m_3 = 0$ y $l_1 = l_2 = l_3 = \eta$ y en estas condiciones el Teorema 3.1.1 nos garantiza que el símbolo

$$A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$$

es parabólico en $S^{r_1,\rho}_{1,0}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{C}^3))$.

Conclusiones

1. El símbolo asociado a las ecuaciones generalizdas de una placa termoelástica

$$A(\xi) := \begin{pmatrix} \chi(\xi)|\xi|^{2\alpha\eta} & \chi(\xi)|\xi|^{2\beta\eta} & 0 \\ -\chi(\xi)|\xi|^{2\beta\eta} & 0 & \chi(\xi)|\xi|^{\eta} \\ 0 & -\chi(\xi)|\xi|^{\eta} & 0 \end{pmatrix}, \ \xi \in \mathbb{R}^n,$$

donde $\eta > 0$ y $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ tiene las siguientes propiedades:

(a) $A(\xi)$ es un sistema Douglis-Nirenberg $\Lambda(\phi)-$elíptico en cada punto de la región triangular

$$T = \left\{ (\beta, \alpha) \in [0,1] \times [0,1] : \ \alpha \geq \beta \ y \ 2\beta - \alpha \geq \frac{1}{2} \right\},$$

bajo la escogencia de órdenes

$$m_1 = 2\eta(\alpha - \beta), \quad m_2 = 0, \quad m_3 = 2\eta \left(\frac{1}{2} + \alpha - 2\beta \right),$$

$$l_1 = 2\beta\eta, \quad l_2 = 2\eta(2\beta - \alpha), \quad l_3 = \eta.$$

(b) Para cada (β, α) en el interior de la región triangular T no existe un $r \in \mathbb{R}^+$ y $\rho \in \mathbb{N}_0$ tal que $A(\xi)$ sea parabólico en $S^{r;\rho}_{1,0}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{C}^3))$.

(c) El único punto de la frontera de la región triangular T para el cual $A(\xi)$ es parabólico es en $(\beta, \alpha) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

2. Si $A(D) := (a_{ij}(D))_{q\times q}$ es un sistema Douglis-Nirenberg $\Lambda(\phi)-$elíptico, entonces una condición suficiente para que $A(\xi)$ sea parabólico es que $0 < \phi \leq \frac{\pi}{2}$, $l_1 = \cdots = l_q$ y $m_1 = \cdots = m_q$.

3. Una pregunta abierta que dejamos en este trabajo es analizar si es válido el recíproco del Teorema 3.1.1.

4. Otra pregunta interesante que dejamos abierta en este trabajo es determinar si existen parejas (β, α) en

$$([0,1] \times [0,1]) \setminus T$$

para los cuales el símbolo

$$A(\xi) := \begin{pmatrix} \chi(\xi)|\xi|^{2\alpha\eta} & \chi(\xi)|\xi|^{2\beta\eta} & 0 \\ -\chi(\xi)|\xi|^{2\beta\eta} & 0 & \chi(\xi)|\xi|^{\eta} \\ 0 & -\chi(\xi)|\xi|^{\eta} & 0 \end{pmatrix}, \ \xi \in \mathbb{R}^n,$$

es parabólico.

Bibliografía

[1] R. Denk, J. Saal and. Seiler, *Bounded H_∞-calculus for pseudodiferential Douglis-Nirenberg systems of mild regularity,*Mathematische Nachrichten. 282, No. 3 (2009), 386-407.

[2] R. Denk and R. Racke, L^p-resolvent and time decay for generalized thermoelastic plate equations, Electronic Jounal of Diff. Eq, Vol. 2006, No 48(2006), 1-16.

[3] J.E. Lagnese , *Boundary stabilization of thin plates*, SIAM Studies Appl. Math. 10 SIAM, Philadelphia (1984).

[4] C. Kiehn, *Analytic semigroups of pseudodiferential operators on vector-valued functions spaces,* Shaker Verlag, 2003.

[5] J. Muños Rivera and R. Racke, *Large solution and smoothing properties for nonlinear thermoelastic systems,* J. Diferential Equations, 127(1996), 454-483.

[6] G. Schleinkofer, *Introduction to pseudodiferential operators*, Universidad nacional de Colombia 1996 .